

Trabajo Fin de Grado

Un estudio comparativo entre esquemas  
numéricos para flujo unidimensional en canales.

A benchmark study of numerical schemes for one-  
dimensional flow in channels.

Autor

Samuel Carro Tierno

Director

Dr. Javier Murillo Castarlenas

Titulación del autor

Grado en ingeniería de tecnologías industriales

EINA

2020



## RESUMEN

En este trabajo se muestra un estudio comparativo de diferentes métodos numéricos, con diferente grado de complejidad, aplicados a la resolución de las ecuaciones de las aguas someras, dentro de una tipología de tipo canal unidimensional.

Para poder realizar una comparación exhaustiva se han implementado códigos en MATLAB que permiten obtener la solución de estas ecuaciones para distintas condiciones iniciales con los siguientes métodos numéricos: diferencias finitas (DF), volúmenes finitos (VF) y elementos finitos (EF).

Las comparaciones realizadas incluyen de condiciones iniciales del tipo de rotura de presa o problema de Riemann. La propiedad de equilibrio entre flujos y términos fuente que asegura el equilibrio en casos de reposo, así como en casos en movimiento, al resolver las ecuaciones de aguas poco profundas con topografía variable, se incluye en los métodos de volúmenes finitos descritos en este trabajo, garantizando numéricamente un nivel de energía constante. Esta propiedad se cumple al hacer uso de los esquemas numéricos aumentados, definidos para problemas de Riemann, que consideran en su definición la presencia de variables, como el fondo, discontinuas. Este enfoque se evalúa sistemáticamente a través de una serie de problemas de Riemann que incluyen el avance de un frente seco/mojado, flujos subcríticos y supercríticos, así como ondas de rarefacción y choques.

En estas comparaciones se pretende estudiar la convergencia, robustez y versatilidad de los distintos códigos empleados, variando el tamaño de la malla, así como el paso de tiempo utilizado en la integración temporal asociado al criterio de Courant–Friedrichs–Lewy (CFL). Las comparaciones incluyen la implementación de las condiciones de contorno.

## AGRADECIMIENTOS

*En primer lugar, me gustaría agradecer a mis padres por todos los sacrificios que han hecho a lo largo de este año para que pudiera estudiar fuera de casa.*

*En cuanto al trabajo, mi total agradecimiento a Javier por su tiempo, amabilidad, sus conocimientos de la materia y por su disposición en estos tiempos difíciles que nos ha tocado vivir.*

*También agradecer la ayuda recibida por parte de Pablo Solán y Adrián Navas con el código de elementos finitos.*

# Índice general

<b>1. Introducción.....</b>	<b>1</b>
1.1.Objeto y alcance del proyecto .....	1
1.2.Estudio del arte .....	1
1.3.Contenido de este trabajo .....	2
<b>2. Modelo matemático. Leyes de conservación.....</b>	<b>3</b>
2.1.Ley de conservación escalar.....	3
2.2.Sistemas de conservación .....	3
2.3.Sistemas hiperbólicos de EDP .....	4
2.4.Problemas de valor inicial y problemas de Riemann.....	4
2.5.Ecuaciones de las aguas someras.....	5
<b>3. Métodos numéricos.....</b>	<b>7</b>
3.1.Elementos de un método numérico.....	7
3.2.Propiedades de un método numérico.....	8
3.3.Métodos de discretización .....	8
3.3.1. Método de las diferencias finitas (DF).....	9
3.3.2. Método de los volúmenes finitos (VF).....	10
3.3.3. Método de los elementos finitos (EF).....	11
<b>4. Estructura de los algoritmos.....</b>	<b>14</b>
4.1.Diferencias finitas: esquema de McCormack.....	14
4.1.1. Limitaciones del esquema.....	15
4.2.Eschema de volúmenes finitos.....	17
4.3.Algoritmo para elementos finitos.....	24
4.3.1. Limitaciones del esquema.....	26
4.4.Condiciones de contorno .....	27
4.4.1. Condición de pared .....	27
4.4.2. Caso estacionario .....	29
<b>5. Comparación.....</b>	<b>30</b>
5.1.Saltos hidráulicos. Condiciones iniciales del tipo de problema de Riemann.....	30
5.1.1. Tiempo de calculo.....	44
5.2.Condiciones de contorno .....	46
5.2.1. Condición de pared .....	46
5.2.2. Caso estacionario .....	47
<b>6. Conclusiones .....</b>	<b>48</b>
<b>Referencias .....</b>	<b>50</b>
<b>Anexo I. Ampliación de las ecuaciones de conservación.....</b>	<b>52</b>
Método de las características .....	52
Condición CFL .....	52
<b>Anexo II. Simulación de la ecuación de Burgers .....</b>	<b>54</b>

# 1. Introducción

## 1.1. Objeto y alcance del proyecto

Este trabajo tiene como objeto el estudio comparativo de distintos métodos numéricos empleados en la resolución de leyes de conservación hiperbólicas, concretamente en el caso de las ecuaciones de las aguas someras (*shallow water equations*, SWE en adelante).

Actualmente existen muchos esquemas y métodos numéricos aplicados a este campo, pero en este proyecto se va a poner el foco en tres de ellos. Para ello se van a desarrollar códigos propios en MATLAB que permitan resolver las SWE unidimensionales. Los métodos por comparar son los de volúmenes finitos (FVM), diferencias finitas (FDM) y elementos finitos (FEM). Una vez programados los códigos se someterán a casos que pongan a prueba distintos aspectos de los esquemas numéricos (convergencia, entropía, versatilidad) y se analizará el comportamiento de cada uno.

## 1.2. Estudio del arte

Los métodos numéricos que se van a estudiar surgen a mediados del siglo XX y han ido evolucionando desde entonces siendo empleados en infinitud de casos. En este apartado sin embargo se presentan estudios y trabajos similares a este para poder determinar así su grado de innovación, enfocándose solo en los esquemas relacionados con las SWE.

Existen códigos comerciales específicos para la resolución de las SWE basados en distintos métodos numéricos. CARPA es un código desarrollado por la Universidad Politécnica de Cataluña basado en volúmenes finitos. HEC-RAS es un software que modela el flujo de agua en ríos y canales desarrollado por el cuerpo de ingenieros de la armada norteamericana y está basado en diferencias finitas. Existen muchos otros, pero estos son los principales que se han encontrado en estudios y artículos donde se comparan distintos esquemas.

En cuanto a dichos artículos, principalmente se aborda una comparación de los resultados que ofrecen estos códigos para uno o varios casos concretos, sin profundizar en el propio método. (Fuentes 2008) (J. Soler 2012) (José Luis Aragón 2010). Por otro lado, existen artículos que sí profundizan en este aspecto, ya sea dentro de un mismo método comparando distintos esquemas aunque limitándose a la ecuación de advección (Bouche, Bonnaud y Ramos 2002) (Yiquin Guan 2006) o comparando dos métodos distintos pero enmarcado dentro del problema de rotura de presa únicamente. (Chinchilla, Orgaz y Muñoz 2014).

De esta forma este trabajo pretende ampliar y ofrecer una comparación completa entre los métodos anteriormente comentados ofreciendo un enfoque inusual en este tipo de artículos.

### 1.3. Contenido de este trabajo

El trabajo se ha estructurado de forma que el lector pueda comprender las bases sobre las que se fundamentan las comparaciones y porque es necesario realizar una comparación entre métodos numéricos.

En el apartado 2 se presenta el modelo matemático del flujo en canales. Primero, se realiza una introducción a las leyes de conservación para acabar concretando sobre las ecuaciones para las aguas someras o poco profundas, las cuales se emplean en este trabajo.

En el apartado 3 se presentan los métodos numéricos para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales y concretamente para los casos hiperbólicos. Se detallan tanto los elementos como las propiedades asociados a un método numérico y se desarrollan los principales métodos que se emplean, el de diferencias finitas (DF), elementos finitos (EF) y volúmenes finitos (VF).

Posteriormente en el 4 se presentan los algoritmos empleados para implementar cada uno de los distintos métodos, así como alguna de las peculiaridades y limitaciones de cada esquema. Se ha preferido incluir las limitaciones que se ven en las comparaciones en este apartado.

Finalmente, en el apartado 5 se muestran las comparaciones realizadas para una serie de casos que permiten comprobar la robustez y versatilidad de los distintos esquemas. Se compara cada esquema variando el tamaño de malla, así como el CFL de forma que se pueda estudiar cómo influyen estas variables a dichos esquemas. También se realiza una comparación para casos con condiciones de contorno. Tras esto se recogen las conclusiones del trabajo en el apartado 6.

En el Anexo I se añade una explicación del método de las características para la resolución de ecuaciones diferenciales que sirve de base para algunos aspectos de los modelos y los métodos, como es la condición CFL (Courant–Friedrichs–Lewy).

Previo al desarrollo de los códigos para los sistemas finitos se experimentó con uno que permitía resolver una ecuación de transporte no lineal en vez de un sistema de ecuaciones no lineales, que representa la dinámica del problema a través de una única onda: la ecuación de Burgers. En el Anexo II se muestran los resultados de este código de volúmenes finitos para distintas condiciones iniciales.

## 2. Modelo matemático. Leyes de conservación.

Un gran número de las ecuaciones fundamentales empleadas para modelar fenómenos físicos y naturales tienen su origen en las leyes de conservación. Estas leyes de conservación se basan en ecuaciones de balance, donde una determinada cantidad se equilibra a través de un proceso. (Logan 2008)

Un ejemplo típico de estas leyes de conservación es el caso de un flujo compuesto de especies químicas que atraviesa una región del espacio donde está teniendo lugar una reacción. Para una especie química dada, su variación temporal dentro de esa región espacial será igual a la tasa de entrada de dicha especie menos la tasa de salida, más la tasa con la que la especie es creada o consumida por la reacción química.

### 2.1. Ley de conservación escalar

Las ecuaciones en derivadas parciales que modela los fenómenos de conservación tienen la siguiente forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = s \quad \text{Ec. 1}$$

Donde  $u$  es la variable conservada,  $f(u)$  es el flujo y  $s$  el término fuente. En función de la forma del flujo se tienen distintas ecuaciones características dentro de las leyes de conservación.

- Ecuación del transporte o advectiva:

$$f(u) = \lambda u \quad \text{Ec. 2}$$

- Ecuación de Burgers:

$$f(u) = \frac{1}{2} u^2 \quad \text{Ec. 3}$$

En el Anexo I se muestra la solución analítica de la ecuación de transporte, lo que permite extraer fundamentos importantes para los métodos discretos. La simulación por volúmenes finitos de la solución a la ecuación de Burgers se encuentra en el Anexo II.

### 2.2. Sistemas de conservación

Extendiendo el mismo concepto físico para el caso de las ecuaciones de conservación escalares, la variable  $u$  pasa a ser un vector de variables conservadas  $\mathbf{U}$ .

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{S} \quad \text{Ec. 4}$$



En forma cuasilinear:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}(x, t) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{S} \quad \text{Ec. 5}$$

Donde  $\mathbf{A}(x, t)$  es una matriz de coeficientes de  $\mathbf{m} \times \mathbf{m}$ , siendo  $\mathbf{m}$  el número de ecuaciones del sistema, que pueden depender tanto del espacio como del tiempo. Si dependen el sistema será no lineal. Los coeficientes de esta matriz pueden depender de las variables conservadas, siendo este un sistema no lineal como es el caso de las SWE.

## 2.3. Sistemas hiperbólicos de EDP

En función de los valores propios de la matriz del término convectivo de la ecuación Ec. 5, los sistemas de ecuaciones pueden clasificarse en tres tipos, elípticas, parabólicas o hiperbólicas. Las de tipo hiperbólico son aquellas que tiene todos los valores propios reales y los vectores propios independientes. Si todos los valores son distintos de cero se dice que es estrictamente hiperbólica.

Por tanto, para el caso hiperbólico, la matriz  $\mathbf{A}$  es diagonalizable:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^{-1} \quad \text{Ec. 6}$$

Siendo  $\mathbf{P}$  la matriz formada por los vectores propios de  $\mathbf{A}$ . Esto permite transformar la Ec. 5 en un sistema de  $\mathbf{m}$  ecuaciones desacopladas. Multiplicando  $\mathbf{P}^{-1}$  por la izquierda y sustituyendo  $\mathbf{A}$  por la Ec. 6 obtenemos:

$$\mathbf{P}^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{S} \quad \text{Ec. 7}$$

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{U} = \mathbf{V} = (v_1, \dots, v_m)^T; \mathbf{P}^{-1} \mathbf{S} = \mathbf{B} = (\beta_1, \dots, \beta_m)^T \quad \text{Ec. 8}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} &= \mathbf{B} \\ \frac{\partial v_m}{\partial t} + \lambda_m \frac{\partial v_m}{\partial x} &= \beta_m \end{aligned} \quad \text{Ec. 9}$$

De esta forma, proyectando las variables conservadas y el término fuente en la base de los vectores propios de  $\mathbf{A}$ , es posible resolver exactamente cada ecuación desacoplada para cada problema de Riemann discreto previa linealización de  $\mathbf{A}$ .

## 2.4. Problemas de valor inicial y problemas de Riemann

Hasta ahora se han definido las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que modelan un sistema de conservación. Aunque es posible obtener la solución general para algunos casos concretos, muy sencillos, a su vez nos interesa obtener la solución para cualquier caso, es decir, para condiciones iniciales en el interior del dominio de cálculo y de condiciones de contorno temporales arbitrarias. Este aspecto es importante desde el punto de vista de los métodos numéricos ya que sin condiciones de partida es imposible llevarlos a cabo. De esta forma se define el *problema de Cauchy* o de valor inicial:

$$\begin{cases} u_t + F(x, t, u, u_x) = 0 \\ u(x, t = 0) = u_0(x) \end{cases}$$

Dentro de los problemas de valor inicial hay uno en particular que resulta de gran interés para los métodos que se pretenden abordar. Este es el *problema de Riemann*, cuyas condiciones iniciales están definidas a modo de salto o escalón:

$$u_0(x) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < 0 \\ u_R & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{Ec. 10}$$

El planteamiento de estas condiciones iniciales es interesante ya que en problemas como el de volúmenes finitos se dan este tipo de condiciones entre cada celda. Este tipo de condiciones iniciales ha suscitado que diversos autores a lo largo del tiempo hayan propuesto esquemas para su resolución. (Toro 2009).

## 2.5. Ecuaciones de las aguas someras

Las ecuaciones de las aguas someras o ecuaciones de Saint Venant representan las ecuaciones de conservación masa y del momento asumiendo que la altura del agua es mucho menor que su longitud (i.e. un canal). También suponen que las distribuciones de presión en la columna de agua son hidrostáticas, o que las aceleraciones verticales son despreciables. Son muchos los fenómenos que pueden modelarse a través de estas ecuaciones y representan un claro ejemplo de un sistema de conservación hiperbólico no lineal. En (Hervouet 2007) se muestran el proceso de obtención que dan lugar a las ecuaciones de las aguas someras y se amplían y estudian las variaciones de estas ecuaciones con mucho mayor detalle. El sistema de ecuaciones está formado por:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu) = 0 \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right) = S_z + S_f \end{cases} \quad \text{Ec. 11}$$

y se puede expresar como la ecuación Ec. 4 de la forma que:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}; \mathbf{F} = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}; \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ S_z + S_f \end{pmatrix} \quad \text{Ec. 12}$$

$h$  representa la altura del agua respecto al fondo y  $u$  la velocidad promedio para cada punto en la longitud del canal. El termino fuente describe la variación del fondo del canal y la fricción que viene dada por la expresión de Manning:

$$S_f = \frac{Q^2 n^2}{A^2 R^{4/3}} \quad \text{Ec. 13}$$

Donde  $R$  es el radio hidráulico y  $A$  el área transversal del canal,  $n$  el coeficiente de Manning y  $Q$  el caudal ( $hu$ ). No obstante, los casos descritos en esta memoria, a fin de poderse comparar con soluciones exactas, no incluyen el término de fricción en el fondo del canal.

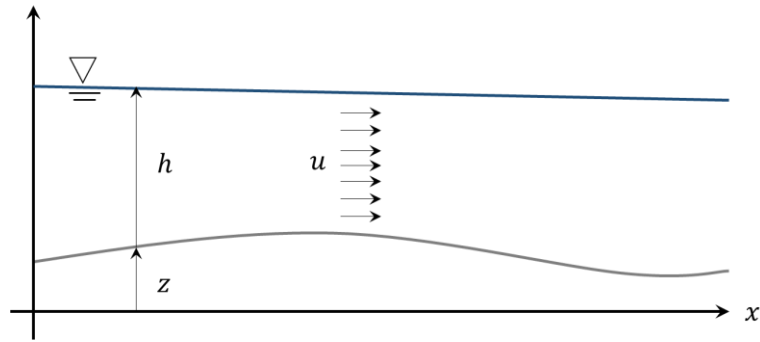


Figura 1. Representación esquemática de las aguas someras.  $z$  representa el fondo y  $h$  la altura de calado.  $u$  es constante en las secciones que para el caso unidimensional es solamente la altura de calado para cada punto.

## 3. Métodos numéricos

Como se ha comentado en el apartado anterior, muchos de los fenómenos físicos se pueden describir a través de ecuaciones en derivadas parciales o integro-diferenciales. No obstante, aun hoy en día no se conoce su solución analítica a excepción de algunos casos muy simples.

Es por ello por lo que a mediados del siglo pasado se empezó a desarrollar una nueva rama de la mecánica de fluidos con la aparición de los primeros ordenadores conocida como *mecánica de fluidos computacional* o CFD por sus siglas en inglés. Su objetivo principal es el desarrollo de métodos numéricos y algoritmos capaces de resolver problemas sobre el flujo de fluidos principalmente.

### 3.1. Elementos de un método numérico

Para el desarrollo de cualquier método numérico es necesario que cuente con una serie de elementos. El punto de partida es el modelo matemático definido por las ecuaciones diferenciales o integro-diferenciales. En el caso de este trabajo serán las SWE. Para cada tipo de sistemas de conservación (hiperbólico, elíptico y parabólico) existen diferencias a la hora de implementar los métodos numéricos.

Una vez definidas estas ecuaciones, entra en juego el método de discretización, es decir, un método de aproximación de las ecuaciones diferenciales por un sistema algebraico de ecuaciones para las variables, definido en un conjunto discreto del espacio y del tiempo (principalmente). Existen multitud de ellos, pero en este trabajo se desarrollan únicamente los de diferencias finitas (DF), volúmenes finitos (VF) y elementos finitos (EF). Dentro de cada método hay distintas peculiaridades que se comentaran más adelante.

Posteriormente hay que definir el sistema de coordenadas del problema. Las ecuaciones diferenciales que modelan varían en función de si el sistema de referencia es cartesiano, cilíndrico, parabólico, etc. El caso de estudio de este trabajo se limita al sistema cartesiano en una dimensión.

En relación con los elementos anteriores, para el método de discretización es necesario definir el conjunto de puntos del espacio, tiempo y otras variables en donde se van a calcular las soluciones al problema. Existen muchas formas de definir la malla, en función principalmente de la geometría del problema, así como del sistema de referencia. Esta malla a su vez puede ser rígida, móvil, con elementos de tamaño fijo, variable, unidimensional, bidimensional o tridimensional. La diversidad de mallas es equivalente a la de problemas que se puedan plantear. Para el caso que nos concierne se empleará una malla unidimensional con todos sus elementos del mismo tamaño.

Finalmente quedaría por determinar el tipo de *solver* o algoritmo que permita resolver el conjunto de ecuaciones algebraicas o de pasos iterativos si se trata de problemas transitorios. Los algoritmos empleados para cada método se explican en el apartado 4.

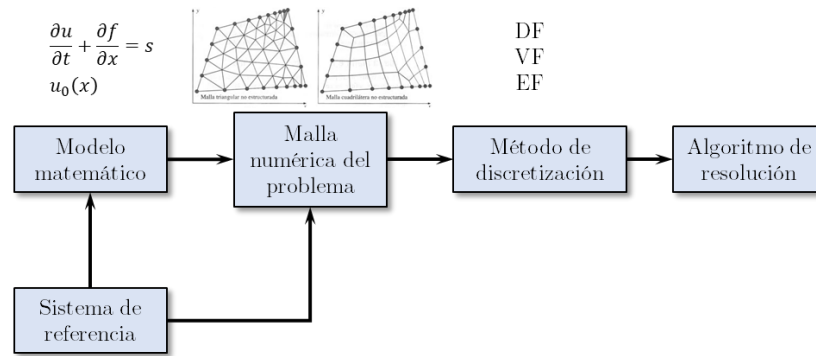


Figura 2. Componentes de un método numérico.

### 3.2. Propiedades de un método numérico

Tomando como referencia las que se definen en (Ferziger y Peric 2002), se presentan ahora el conjunto de propiedades que debe tener un buen método numérico:

- **Consistencia.** La diferencia entre la ecuación discretizada y la exacta se llama error de redondeo. Un método es consistente si este error tiende a cero cuando  $\Delta t$  y/o  $\Delta x_i$  tienden a cero también.
- **Estabilidad.** Un método numérico es estable si no tiende a magnificar los errores a lo largo del proceso de cálculo.
- **Convergencia.** Se dice de un método numérico que es convergente si la solución numérica tiende a la exacta a medida que la malla espacial tiende a cero.
- **Conservación.** Si las ecuaciones a resolver son leyes de conservación, se espera que el método numérico respete estas leyes. Esto suele estar garantizado empleando la formulación fuerte de las leyes de conservación, así como un método de volúmenes finitos.
- **Bien delimitado.** La solución que proporciona el esquema numérico debe estar delimitada físicamente, es decir, variables como son la altura de calado no pueden ser negativas. Si se sale de estos límites pueden aparecer problemas de convergencia y estabilidad.
- **Fiabilidad.** Este aspecto no es numérico si no referente al propio modelo matemático. En fenómenos complejos como la combustión o la turbulencia un modelo matemático preciso garantiza una solución aproximada a la realidad física.
- **Precisión.** Existen una serie de errores que hay que tener en cuenta. Estos son por el propio modelo matemático y las aproximaciones hechas para llegar hasta él, errores en la discretización y errores de iteración o convergencia.

### 3.3. Métodos de discretización

Una vez comentado en que se basa la resolución numérica de EDP y las propiedades principales que debe tener un método numérico, se va a profundizar en los métodos que se van a comparar en este trabajo.

### 3.3.1. Método de las diferencias finitas (DF)

El método de las diferencias finitas es de los primero en aparecer y se cree que fue ya introducido por Euler en el siglo XVIII (Ferziger y Peric 2002). Es un método muy simple que puede emplearse en geometrías sencillas. Por el contrario, puede presentar problemas en la conservación numérica de las variables si no se tiene especial cuidado.

Se parte de la ecuación de conservación en forma **diferencial**, y de una discretización puntual del dominio espacial y temporal. En cada punto de esa malla se aproxima la ecuación diferencial sustituyendo las derivadas por aproximaciones en función de los valores de los nodos de las celdas. Esto da como resultado una ecuación algebraica por cada nodo. Para aproximar las derivadas se emplea el desarrollo en serie de Taylor:

$$u(x) = u(x_i) + (x - x_i) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{(x - x_i)^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + \dots \quad Ec. 14$$

Teniendo en cuenta que el dominio espacial (y temporal) está discretizado, los valores de  $x$  solo podrán tomar los de las celdas adyacentes. Si la distancia entre dos puntos de la malla es pequeña ( $x_i - x_{i-1}$  por ejemplo), los términos de orden superior serán pequeños normalmente, aunque pueden serlo de forma excepcional (Ferziger y Peric 2002), por lo que se limita la aproximación de la derivada al término de primer orden. En función de los puntos de la malla que se tomen se tienen distintas aproximaciones:

- *Forward difference scheme* (FDS)

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} \quad Ec. 15$$

- *Backward-difference scheme* (BDS)

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad Ec. 16$$

- *Central difference scheme* (CDS)

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \quad Ec. 17$$

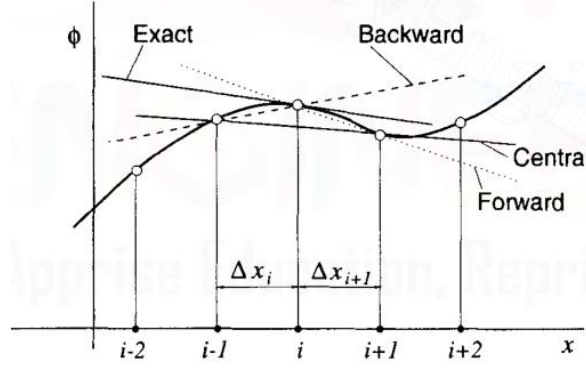


Figura 3. Aproximación de las derivadas. Fuente: (Ferziger & Peric, 2002).

La ecuación del transporte en diferencias finitas empleando un esquema centrado para la derivada con respecto al espacio y un FDS para la derivada temporal quedaría de la siguiente manera:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{t_{i+1} - t_i} + \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{x_{i+1} - x_{i-1}} = s_i \quad \text{Ec. 18}$$

Teniendo en cuenta que  $u_i^n = u_i(t^n)$  y por tanto  $u_i^{n+1}$  es el valor de la variable conservada en el siguiente paso de tiempo,  $t_{i+1} - t_i = \Delta t$  y  $x_{i+1} - x_{i-1} = 2\Delta x$  reordenamos la ecuación Ec. 18 resultando en:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + s_i \Delta t \quad \text{Ec. 19}$$

Definiendo condiciones iniciales  $u_i^0$  para todas las celdas, obtener la solución en el paso temporal siguiente se sustituye simplemente en la Ec. 19.

### 3.3.2. Método de los volúmenes finitos (VF)

El método de los volúmenes finitos plantea la resolución numérica de las leyes de conservación de forma **integral** y no aproximando las derivadas como en el caso anterior. El dominio de la solución se divide en celdas o volúmenes de control, donde el objetivo que se busca es la obtención de una aproximación integral de la variable conservada en esa celda. (Cendón 2008). De esta forma el valor buscado en cada celda se obtiene:

$$u_i^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t^n) dx \quad \text{Ec. 20}$$

Donde  $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$  es el ancho de la celda. Por tanto, para obtener las ecuaciones de este método comenzamos por integrar la ecuación diferencial.

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} - s \right) dt dx = 0 \quad \text{Ec. 21}$$

Desarrollando la expresión anterior llegamos a:

$$\begin{aligned} & \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x, t^{n+1}) dx - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x, t^n) dx = \\ & = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{i-1/2}, t)) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{i+1/2}, t)) dt + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} s dt dx \end{aligned} \quad \text{Ec. 22}$$

Con esta expresión tenemos la forma de actualizar el promedio de la solución en cada celda para el siguiente paso temporal. De forma práctica no suele ser posible evaluar las integrales del segundo término, por tanto, se busca una forma de esquema numérico similar a la planteada en Ec. 19. Para ello se realizan dos transformaciones de los términos de la ecuación Ec. 22.

$$f_{i+1/2}^n \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{i+1/2}, t)) dt \quad \text{Ec. 23}$$

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} s dt dx \approx \Delta t \bar{s}_{i+1/2} \quad \text{Ec. 24}$$

Donde la ecuación Ec. 23 es una aproximación del flujo a lo largo de la recta  $x = x_{i+1/2}$ , con  $t$  variando entre  $t^n$  y  $t^{n+1}$ . La ecuación Ec. 24 es una linealización del término fuente (J. Murillo 2010). Sustituyendo Ec. 20, Ec. 23 y Ec. 24 en Ec. 22 y dividiendo ambos terminos por  $\Delta x$  queda:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n + \bar{s}_{i+\frac{1}{2}} \right) \quad \text{Ec. 25}$$

De esta forma se tiene una ecuación algebraica para cada celda. Faltaría por definir los términos del flujo numérico y el término fuente. La información en este tipo de problemas se transmite de forma finita y debe cumplir la condición CFL por lo que se puede suponer que la función de flujo numérico dependerá de los valores  $u_i^n$  y  $u_{i+1}^n$  a cada lado de la frontera  $x_{i+1/2}$ . (Cendón 2008).

Se han propuesto a lo largo del tiempo varias aproximaciones de este flujo numérico. Se tienen así las aproximaciones de Harten, Lax, and van Leer (HLL), Lax-Friedrichs (LF) y Roe (Roe 1981) (Toro 2009) (Khan y Lai 2014) entre otras. Las aproximaciones del termino fuente se muestran en el apartado 4.2.

### 3.3.3. Método de los elementos finitos (EF)

Este método comparte similitudes con el de volúmenes finitos. El dominio de la solución se divide en celdas o elementos independientes. De la misma forma se emplea la forma integral de la ley de conservación para aproximarla. La principal diferencia con el método de VF es que se multiplican primero por **funciones de ponderación** previamente a la integración sobre el dominio.



En las formulaciones más simples, la solución se aproxima a través de funciones lineales dentro de cada elemento lo que garantiza la continuidad de la solución entre elementos. Por otro lado, existen otras formulaciones, que son precisamente las que se usan en este trabajo, que no mantienen la continuidad entre elementos. Se trata en concreto del método discontinuo de Galerkin. Para este método las funciones de aproximación y las de forma son iguales  $\phi_k(\mathbf{x}) = \psi_k(\mathbf{x})$ .

Se comienza por tanto discretizando el dominio espacial en celdas o volúmenes  $C_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ . El método discreto de Galerkin (DG en adelante) se puede obtener aplicando el método de proyección de Galerkin a cada elemento.

Dentro de cada elemento, las variables del problema (y por tanto la solución) se aproximan a través de una combinación de funciones  $\{\phi_l(\mathbf{x})\}_{l=0,\dots,N_d}$ :

$$u(x, t) \approx u_i(x, t) = \sum_{l=0}^{N_d} \hat{u}_{i,l}(t) \phi_l(x) \quad \text{Ec. 26}$$

donde  $\hat{u}_{i,l}(t)$  son los coeficientes de forma del  $l$ -esimo grado de libertad dentro del elemento.

Dicha proyección se realiza a elementos de referencia de longitud  $[-1, 1]$  donde están definidos el conjunto de polinomios base  $\{\phi_l(\mathbf{x})\}_{l=0,\dots,N_d}$  así como puntos especiales que son los grados de libertad del elemento, coincidiendo estos con los puntos de cuadratura de Gauss dentro del elemento.

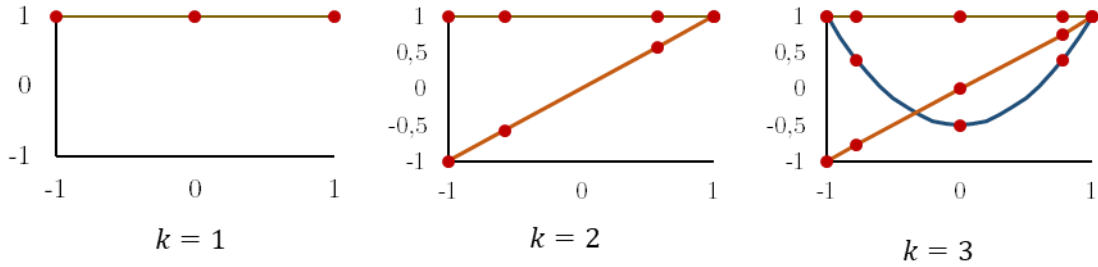


Figura 4. Elementos de referencia con las funciones de aproximación y forma y los puntos de cuadratura de Gauss.

Proyectando la ecuación diferencial al cada elemento, la formulación débil del problema queda así para  $k = 1, \dots, N_d + 1$

$$\int_{C_i} \psi_k(x) \frac{\partial u}{\partial t} dx + \int_{C_i} \psi_k(x) \frac{\partial f(u)}{\partial t} dx = \int_{C_i} \psi_k(x) s dx \quad \text{Ec. 27}$$

Manipulado la ecuación anterior se llega a la Ec. 29 (Montilla, y otros 2020):

$$\frac{\partial \hat{u}_{i,l}}{\partial t} = \mathcal{L}(u, s) \quad \text{Ec. 28}$$

$$\mathcal{L}(u, s) = -\frac{1}{a_k} ((\phi_k f^-)_{i+\frac{1}{2}} - (\phi_k f^+)_{i-\frac{1}{2}}) - \int_{C_i} f(u) \frac{\partial \phi_k}{\partial x} dx - \int_{C_i} \phi_k s(u, z) dx \quad \text{Ec. 29}$$

Los términos  $f_{i+1/2}^-$  y  $f_{i-1/2}^+$  hacen referencia al flujo numérico, ya que la peculiaridad de este esquema hace que en las paredes de las celdas la solución esté bi-evaluada. Por tanto, es necesario introducir un flujo numérico al igual que en el caso de los volúmenes finitos. Por otro lado, el coeficiente  $a_k$  es equivalente a:

$$a_l \delta_{kl} = \int_{C_i} \phi_l \phi_k dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l \\ a_k & \text{si } k = l \end{cases} \quad Ec. 30$$

Esta propiedad se cumple ya que se han escogido un conjunto de polinomios para la base ortogonales, en concreto los polinomios de Legendre, siendo ortogonales estos respecto a la norma del espacio  $L^2$ :

$$(u, v)_C = \int_C uv dx \quad Ec. 31$$

Todos estos aspectos pueden ampliarse en (Montilla, y otros 2020) (Khan y Lai 2014). Una vez se obtiene la variación de las constantes de forma se puede reconstruir la solución para el paso siguiente. Existen distintos esquemas para la obtención de los parámetros de forma asegurando la estabilidad del esquema. Se detallará en el apartado 4.3 el método TVD-RK empleado para el algoritmo de EF. Otra particularidad interesante de este método es que en el caso de que  $k = 1$ , el método coincide con el de volúmenes finitos.

## 4. Estructura de los algoritmos

En este apartado se presenta la estructura de cada esquema numérico empleado en este trabajo. Al existir varias versiones para cada método se explica aquí el seleccionado para así tenerlo en cuenta a la hora de compararlos, ya que como se comentará existen ciertas particularidades para cada esquema que no pueden considerarse generales para cada uno de los tres métodos numéricos.

### 4.1. Diferencias finitas: esquema de McCormack.

La estructura de para este método se ha tomado del artículo (P. García Navarro 1992), donde se presenta una variación del método de las diferencias finitas descrito anteriormente y se emplea el esquema de McCormack. Este esquema consiste en realizar dos aproximaciones de la solución en el paso de tiempo siguiente, una primera solución (*predictor*) que se promedia con la segunda (*corrector*):

$$\frac{\mathbf{U}_i^p - \mathbf{U}_i^n}{\Delta t} + \frac{\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_i^n}{\Delta x} = \mathbf{S}_i^n \quad \text{Ec. 32}$$

$$\frac{\mathbf{U}_i^c - \mathbf{U}_i^n}{\Delta t} + \frac{\mathbf{F}_i^p - \mathbf{F}_{i-1}^p}{\Delta x} = \mathbf{S}_i^p \quad \text{Ec. 33}$$

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}_i^c + \mathbf{U}_i^p) \quad \text{Ec. 34}$$

donde  $\mathbf{F}_i^n$  es el flujo de la Ec. 11 evaluado con los valores de altura y velocidad de la celda  $\mathbf{F}(\mathbf{U}_i^n)$ , de igual manera para obtener las variables del *corrector* se evalúa el flujo con los valores obtenidos en el *predictor*. Ocurre lo mismo con el término fuente  $\mathbf{S}_i^n$ .

Aún con la variación del esquema de McCormack de los pasos *predictor* y *corrector* se observa claramente la estructura de diferencias finitas en las Ec. 32 y Ec. 33. Este esquema numérico es muy sencillo de implementar y a continuación se muestran los pasos que sigue el código.

1. En primer lugar, se definen las condiciones iniciales del problema y se inicializan a cero los vectores y matrices que se van a emplear para el código.
2. Posteriormente se calculan las velocidades de las ondas características de las ecuaciones de las SWE y así poder obtener el paso de tiempo:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)} \cdot CFL ; \lambda_{1,2} = \tilde{u} \mp \tilde{c}$$

3. Una vez definido el paso temporal ya se puede realizar el cálculo de las variables en cada celda para  $\mathbf{t}^{n+1} = \mathbf{t}^n + \Delta t$  aplicando las ecuaciones Ec. 32, Ec. 33 y Ec. 34. Para repetir el proceso se actualizan el vector de variables conservadas  $\mathbf{U}_i^n = \mathbf{U}_i^{n+1}$  y se vuelve al segundo paso. Se repiten estos pasos hasta alcanzar el tiempo que se quiere simular establecido en el punto 1.
4. Una vez se ha completado la simulación se pueden visualizar los datos o exportarlos.

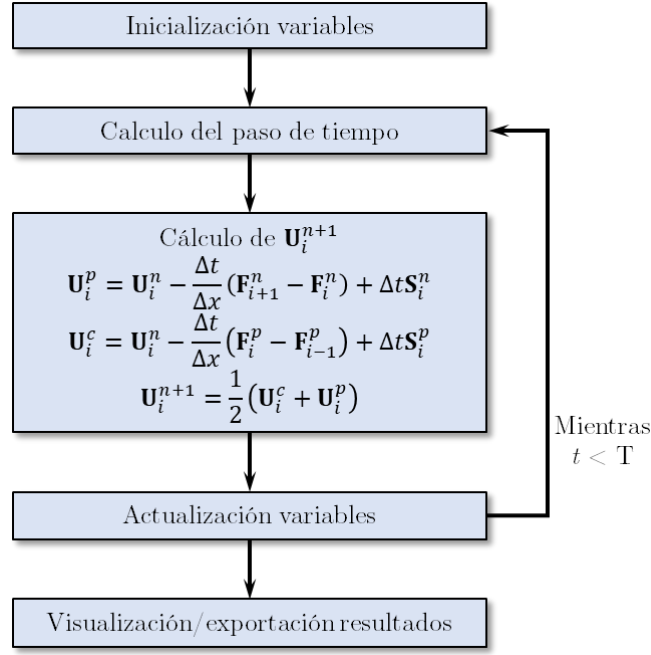


Figura 5. Algoritmo para diferencias finitas

#### 4.1.1. Limitaciones del esquema

Una de las ventajas que presenta este esquema es su fácil implementación, comparado con los dos siguientes. Por otro lado, presenta varias limitaciones que hacen que sea poco flexible para distintos casos y condiciones iniciales.

Uno de los principales problemas que presenta son las oscilaciones cerca de las discontinuidades, que se ven magnificadas para valores de CFL bajos. En la Figura 6 se aprecian estas oscilaciones y como aumentan al disminuir el CFL en un problema de rotura de presa.

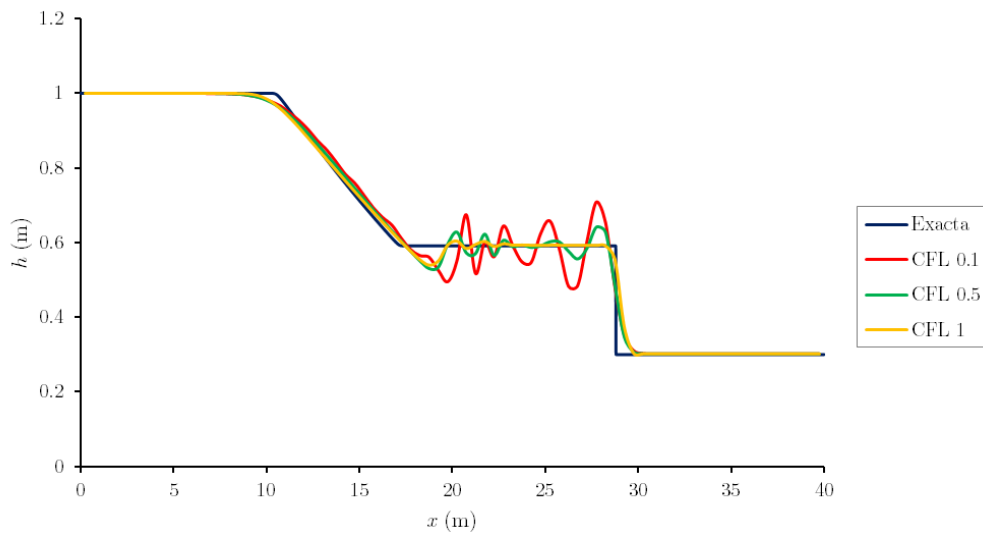


Figura 6. Simulación con McCormack de un problema de Riemann para  $h_R = 1$  m;  $h_L = 0.3$  m;  $\Delta x = 0.5$  y  $T = 3$  s.

Para solucionar este problema de oscilación se puede incluir la propiedad TVD o *total variation diminishing* al esquema. Esta modificación al esquema permite capturar los choques y rarefacciones de forma más nítida sin las oscilaciones como las que se han observado, principalmente en mallas con  $\Delta x$  relativamente grandes. De esta forma no es necesario reducir el tamaño de malla hasta pasos espaciales muy pequeños dando lugar a tiempos de simulación muy elevados. Para este esquema en concreto se puede ver la corrección con TVD en el mismo artículo (P. García Navarro 1992), pero para las simulaciones no se ha incluido ya que los otros esquemas no requieren de esta corrección.

Otra limitación de este esquema, y que afecta a la simulación en algunos casos es la reducción del paso de tiempo hasta llegar a un punto que la simulación no alcanza nunca el tiempo deseado. Esto se debe a la propia obtención del paso de tiempo a partir de las velocidades de onda. Estas velocidades de onda se calculan a partir de los valores  $u$  y  $c$ , que en ocasiones se producen “picos” de velocidad que hacen reducir el paso de tiempo drásticamente.

Se ha planteado por tanto el caso 5 de los propuestos en el apartado 5 donde se muestra este fenómeno. En el Figura 7 se muestra el paso de tiempo para cada iteración del bucle temporal. Como se ve esta se va reduciendo sistemáticamente hasta llegar a un paso de tiempo 100 veces menor que el original. Esto se deben a los mencionados picos que se muestran en la Figura 8, en la iteración previa al cambio del paso de tiempo. Estos picos elevan mucho el valor tomado de  $\lambda$  y por tanto reducen el paso de tiempo manteniéndolo en ese nivel.

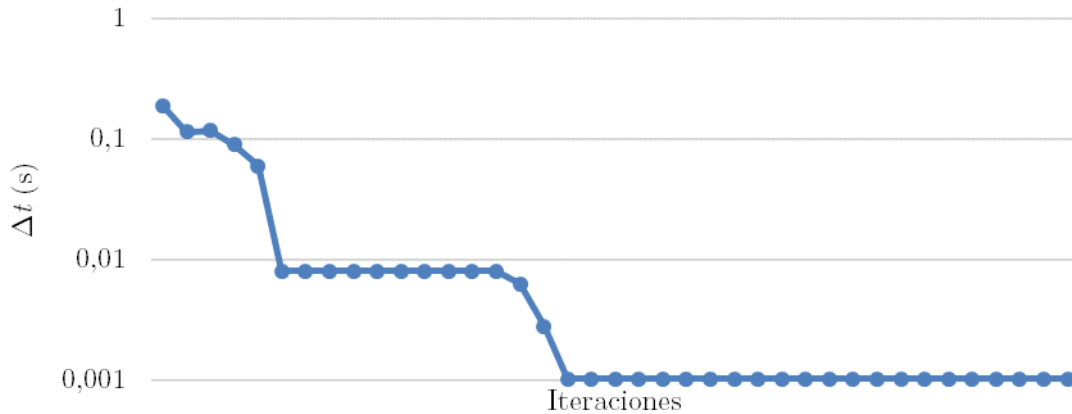


Figura 7. Evolución del paso de tiempo para cada iteración del bucle temporal. Caso 5 de las comparaciones.

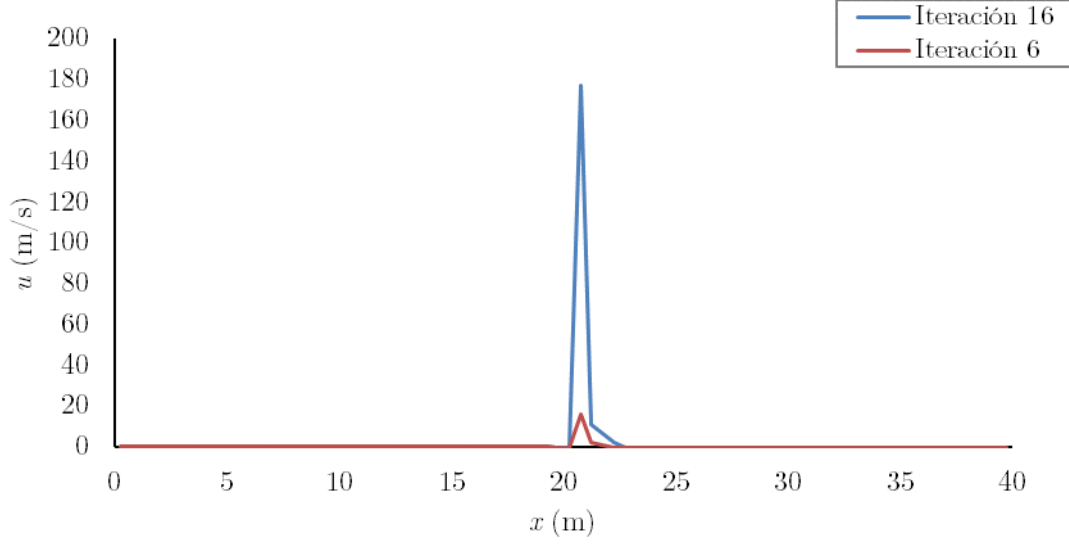


Figura 8. Perfil de velocidades donde se muestran los picos de velocidad para el caso 5 de las comparaciones.

Estas dos limitaciones hacen que en algunos casos de los que se muestran en el siguiente apartado no se hayan podido incluir las simulaciones porque no son capaces de llegar al tiempo marcado.

## 4.2. Esquema de volúmenes finitos

Para el método de volúmenes finitos se han tomado como referencia los artículos (J. Murillo 2016) (J. Murillo 2010), donde se aplica el método de los volúmenes finitos descrito en el apartado anterior, el cual a su vez deriva del propuesto originalmente por Godunov (Godunov 1959). Este código es más complejo que el de DF ya que se realizan distintas correcciones.

Para el desarrollo de este código se emplea el esquema numérico de Roe, el cual propone la siguiente aproximación del sistema de conservación (Toro 2009) (Roe 1981):

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{J}}_{i+\frac{1}{2}} \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial x} = \mathbf{S} \quad \text{Ec. 35}$$

$$\hat{\mathbf{U}}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{U}_i & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{U}_{i+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La definición de este Jacobiano debe cumplir las siguientes condiciones:

- Mantener la hiperbolicidad del sistema, es decir la matriz debe tener valores propios reales y vectores propios independientes.
- Consistencia con el Jacobiano exacto.  $\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \mathbf{J}(\mathbf{U})$
- Conservación a través de las discontinuidades. Esto es equivalente a cumplir la condición Rankine-Hugonot:  $\delta \mathbf{F} = \tilde{\mathbf{J}} \delta \mathbf{U}$

El jacobiano propuesto que cumple con estas características es el siguiente, donde el gorro indica que son aproximaciones:

$$\tilde{\mathbf{J}}_{i+1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{c} - \tilde{u} & 2\tilde{u} \end{pmatrix} \quad \text{Ec. 36}$$

Cuyos valores y vectores propios son:

$$\tilde{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^1 = (\tilde{u} - \tilde{c})_{i+1/2}; \quad \tilde{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^2 = (\tilde{u} + \tilde{c})_{i+1/2} \quad \text{Ec. 37}$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_{i+\frac{1}{2}}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^1 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{e}}_{i+\frac{1}{2}}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^2 \end{pmatrix} \quad \text{Ec. 38}$$

$$u_{i+1/2} = \frac{u_i \sqrt{h_i} + u_{i+1} \sqrt{h_{i+1}}}{\sqrt{h_i} + \sqrt{h_{i+1}}} \quad \text{Ec. 39}$$

$$c_{i+1/2} = \sqrt{g \frac{h_i + h_{i+1}}{2}} \quad \text{Ec. 40}$$

En cuanto al cálculo del término fuente existen diversas formas de programarlo, destacando que la forma integral converge hacia la solución exacta, aspecto importante ya que a la hora de comparar con la solución exacta en el apartado siguiente se tomara esta integración con un  $\Delta x$  muy pequeño.

- Forma diferencial

$$\bar{s}_{i+\frac{1}{2}} = -g \frac{h_i + h_{i+1}}{2} \delta z_{i+1/2} \quad \text{Ec. 41}$$

$$\delta z_{i+\frac{1}{2}} = z_{i+1} - z_i \quad \text{Ec. 42}$$

- Forma integral

$$\bar{s}_{i+\frac{1}{2}} = -g \left( h_j - \frac{|\delta z'|}{2} \right) \delta z' \quad \text{Ec. 43}$$

$$j = \begin{cases} i & \text{si } \delta z \geq 0 \\ i+1 & \text{si } \delta z < 0 \end{cases} \quad \text{Ec. 44}$$

$$\delta z' = \begin{cases} h_i & \text{si } \delta z \geq 0 \text{ y } e_i < z_{i+1} \\ h_{i+1} & \text{si } \delta z < 0 \text{ y } e_{i+1} < z_i \\ \delta z_{i+\frac{1}{2}} & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{Ec. 45}$$

$$e_i = h_i + z_i \quad \text{Ec. 46}$$

- Forma integro-diferencial

$$\bar{s}_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \max(\bar{s}_{dif}, \bar{s}_{int}) & \text{si } \delta d \delta z \geq 0 \text{ y } \tilde{u} \delta z > 0 \\ \bar{s}_{int} & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{Ec. 47}$$

- Con corrección de la energía (Murillo y Navarro 2013)

$$\bar{s}_{i+\frac{1}{2}} = (1 - A)T_{b2}^n + AT_{b1}^n \quad Ec. 48$$

$$A = \begin{cases} A_E & \text{si } u_{i+1}u_i > 0 \text{ y } |Fr_{i+1}| < 1 \text{ y } |Fr_i| < 1 \\ A_E & \text{si } u_{i+1}u_i > 0 \text{ y } |Fr_{i+1}| < 1 \text{ y } |Fr_i| < 1 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad Ec. 49$$

$$A_E = \frac{\delta(hu^2) - \bar{h}\delta\left(\frac{1}{2}u^2\right)}{T_{b1}^n - T_{b2}^n} \quad Ec. 50$$

Donde  $T_{b1}^n$  es la aproximación integral (Ec. 43) y  $T_{b2}^n$  la aproximación diferencial (Ec. 41)

El efecto de la aproximación del término fuente se puede apreciar en el caso concreto en la Figura 9.

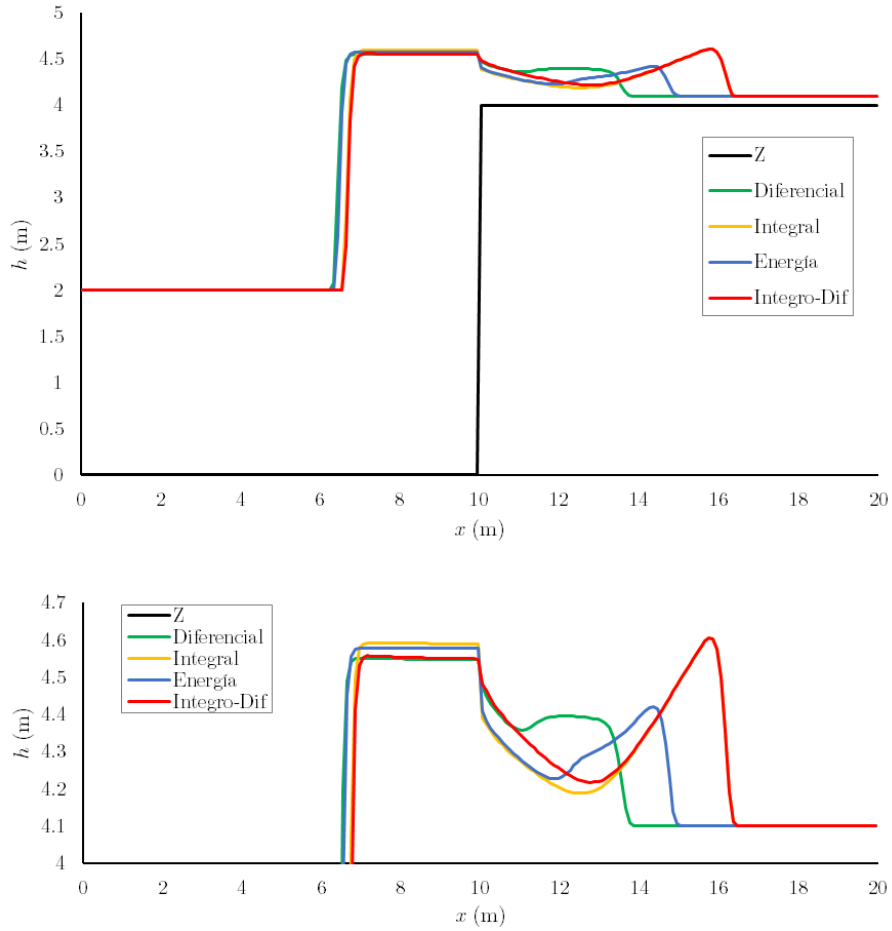


Figura 9. Comparación de la solución en función del tipo de aproximación del término fuente.

$$h_L = 2 \text{ m}; h_R = 0.1 \text{ m}; z_L = 0 \text{ m}; z_R = 4 \text{ m}; u_L = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}; u_R = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}; CFL = 0,5; \\ \Delta x = 0,1; T = 1$$

Tras el cálculo del término fuente se han programado dos formas de estabilizar la solución y evitar valores no físicos negativos de calado. La primera es reduciendo el paso de tiempo y la segunda acotando el término fuente, ambas formas basándose en asegurar que la soluciones que da el algoritmo de la altura de calado sean siempre positivas.



- *Reducción del paso de tiempo.* Basándonos en el método de Godunov para los RP, es posible definir de forma analítica un paso de tiempo que cumpla estas condiciones (J. Murillo 2010):

$$\Delta t^\lambda = \frac{\Delta x}{\max(|\tilde{\lambda}_1|, |\tilde{\lambda}_2|)} \quad \text{Ec. 51}$$

$$\Delta t^{**} = \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\tilde{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^2} \frac{h_{i+1}^n}{h_{i+1}^n - h_{i+1}^{**}} \quad \text{Ec. 52}$$

$$\Delta t^* = \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\tilde{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^1} \frac{h_i^n}{h_i^n - h_i^*} \quad \text{Ec. 53}$$

$$\Delta t = \begin{cases} \min(\Delta t^{**}, \Delta t^*, \Delta t^\lambda) & \text{si } \tilde{\lambda}^1 \tilde{\lambda}^2 < 0 \\ \Delta t^\lambda & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{Ec. 54}$$

- *Corrección del término fuente.* Se calculan los valores límite del término fuente que aseguren la positividad de las soluciones en función de si el flujo es subcrítico o supercrítico y se limitan directamente en los términos  $\beta$  (J. Murillo 2016)

$$\begin{aligned} \beta_{i+1/2}^1 &= -\frac{\bar{s}_{i+1/2}}{2\tilde{c}_{i+1/2}} \\ \beta_{i+1/2}^2 &= \frac{\bar{s}_{i+1/2}}{2\tilde{c}_{i+1/2}} \end{aligned} \quad \text{Ec. 55}$$

Para  $Fr < 1$  (subcrítico)

$$\bar{s}_{i+1/2} \in (-2h^* \tilde{c} \tilde{\lambda}^2; -2h^* \tilde{c} \tilde{\lambda}^1) \quad \text{Ec. 56}$$

Para  $Fr > 1$  (supercrítico)

$$\bar{s}_{i+1/2} \in (-2h^* \tilde{c} \tilde{\lambda}^2; h_i \tilde{\lambda}^1 \tilde{\lambda}^2) \quad \text{Ec. 57}$$

Donde  $h_i^* = h_i + \alpha_{i+1/2}^1$  y  $Fr$  es el número de Froude,  $Fr = u/\sqrt{gh}$

El paso siguiente sería el de calcular los flujos numéricos. Para este esquema se emplea el esquema numérico de Roe. Para este caso se ha planteado la solución en ondas, se calcula el flujo entrante de la celda anterior  $(\delta \mathbf{F} - \mathbf{S})_{i-1/2}^+$  y el flujo entrante de la siguiente celda  $(\delta \mathbf{F} - \mathbf{S})_{i+1/2}^-$ . Para obtener esta expresión empleamos la condición de Rankine-Hugonot:

$$\delta \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{S}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{J}_{i+\frac{1}{2}} \delta \mathbf{U} - \mathbf{S}_{i+\frac{1}{2}} \quad \text{Ec. 58}$$

Como se ha comentado el jacobiano aproximado se puede diagonalizar, y aplicando las definiciones de la Ec. 8, se llega a la siguiente expresión:

$$\delta \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{S}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \quad \text{Ec. 59}$$

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{S}_{i+\frac{1}{2}} &= \mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{A} - \mathbf{B}) \\
\delta \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{S}_{i+\frac{1}{2}} &= \sum_{m=1}^2 \left( \tilde{\mathbf{e}}(\tilde{\lambda}\alpha - \beta) \right)_{i+1/2}^m \\
\mathbf{P}\mathbf{A} &= \delta \mathbf{U}; \mathbf{A} = (\alpha^1, \alpha^2)^T
\end{aligned} \tag{Ec. 60}$$

Donde  $\alpha^m$  representan los pesos de las ondas y  $\beta^m$  los pesos del término fuente. Estos coeficientes  $\alpha^m$  se definen de la siguiente manera, los  $\beta^m$  se encuentran expresados en la Ec. 55.

$$\begin{aligned}
\alpha_{i+1/2}^1 &= \left( \frac{\delta h}{2} + \frac{\tilde{u}\delta h - \delta(hu)}{2\tilde{c}} \right)_{i+1/2} \\
\alpha_{i+1/2}^2 &= \left( \frac{\delta h}{2} - \frac{\tilde{u}\delta h - \delta(hu)}{2\tilde{c}} \right)_{i+1/2}
\end{aligned} \tag{Ec. 61}$$

Para la implementación en el código, se realiza una pequeña modificación para que el flujo se considere entrante desde cada celda contigua y así calcular la solución de forma más compacta. Para ello se modifica la ecuación Ec. 59 incluyendo un término  $\tilde{\lambda}^{m,\pm}$ , que toma el valor 0 si desde la celda correspondiente no entra ningún flujo o de que el flujo entrante tome el valor exacto de la Ec. 59.

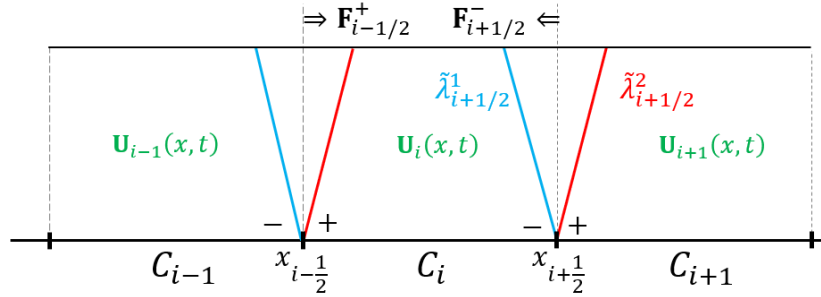


Figura 10. Representación de los flujos entrantes a una celda.

$$\tilde{\lambda}_{i+1/2}^{m,\pm} = \frac{1}{2}(\tilde{\lambda}^m \pm |\tilde{\lambda}^m|)_{i+1/2} \tag{Ec. 62}$$

$$(\delta \mathbf{F} - \mathbf{S})_{i+1/2}^{\pm} = \sum_{m=1}^2 \left( \tilde{\lambda}^{\pm} \left( \alpha - \frac{\beta}{\tilde{\lambda}} \right) \tilde{\mathbf{e}} \right)_{i+1/2}^m \tag{Ec. 63}$$

Una vez definido el flujo numérico, ya se puede proceder al cálculo de las variables conservadas en el siguiente paso de tiempo. No obstante, se realiza un paso previo que tiene como objetivo corregir las soluciones que no cumplen la condición de la entropía. Para ello se muestra el problema de Riemann en la Figura 11. Se aprecia como en la parte central se produce un salto en la simulación. Este salto no debería darse ya que no hay influencia de un escalón en el fondo o cualquier otro término en las ecuaciones que genere esa discontinuidad. Esta corrección se realiza separando la onda en dos y recalculando el término del flujo numérico (J.Murillo 2016)

$$\check{\lambda}^m + \check{\lambda}^m = \check{\lambda}^m \tag{Ec. 64}$$

$$\tilde{\lambda}_{i+1/2}^m = \lambda_{i+1}^m \frac{\tilde{\lambda}^m - \lambda_i^m}{\lambda_{i+1}^m - \lambda_i^m}$$

Para el caso de una rarefacción transcítica hacia la izquierda, si  $\lambda_i^1 < 0$  y  $\lambda_{i+1}^1 > 0$

$$\begin{aligned} (\delta \mathbf{F} - \mathbf{S})_{i+1/2}^+ &= (\tilde{\mathbf{e}} \tilde{\lambda} \alpha)_{i+1/2}^1 + \left( \tilde{\lambda}^+ \left( \alpha + \frac{\beta}{\tilde{\lambda}} \right) \mathbf{e} \right)_{i+1/2}^2 \\ (\delta \mathbf{F} - \mathbf{S})_{i+1/2}^- &= \left( \tilde{\mathbf{e}} (\tilde{\lambda} \alpha - \beta) \right)_{i+1/2}^1 + \left( \tilde{\lambda}^- \left( \alpha + \frac{\beta}{\tilde{\lambda}} \right) \mathbf{e} \right)_{i+1/2}^2 \end{aligned} \quad \text{Ec. 65}$$

Para el caso de una rarefacción transcítica hacia la derecha, si  $\lambda_i^2 < 0$  y  $\lambda_{i+1}^2 > 0$

$$\begin{aligned} (\delta \mathbf{F} - \mathbf{S})_{i+1/2}^+ &= \left( \tilde{\lambda}^+ \left( \alpha + \frac{\beta}{\tilde{\lambda}} \right) \tilde{\mathbf{e}} \right)_{i+1/2}^1 + (\tilde{\mathbf{e}} \tilde{\lambda} \alpha)_{i+1/2}^2 \\ (\delta \mathbf{F} - \mathbf{S})_{i+1/2}^- &= + \left( \tilde{\lambda}^- \left( \alpha + \frac{\beta}{\tilde{\lambda}} \right) \tilde{\mathbf{e}} \right)_{i+1/2}^2 + \left( \tilde{\mathbf{e}} (\tilde{\lambda} \alpha - \beta) \right)_{i+1/2}^2 \end{aligned} \quad \text{Ec. 66}$$

Finalmente se calcula la solución en el siguiente paso temporal sustituyendo en la Ec. 67. Aunque con alguna variación la ecuación Ec. 67 es equivalente a la Ec. 25 y por tanto se ha pasado de la ecuación diferencial a una ecuación algebraica para cada celda.

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} ((\delta \mathbf{F} - \mathbf{S})_{i-1/2}^+ + (\delta \mathbf{F} - \mathbf{S})_{i+1/2}^-) \quad \text{Ec. 67}$$

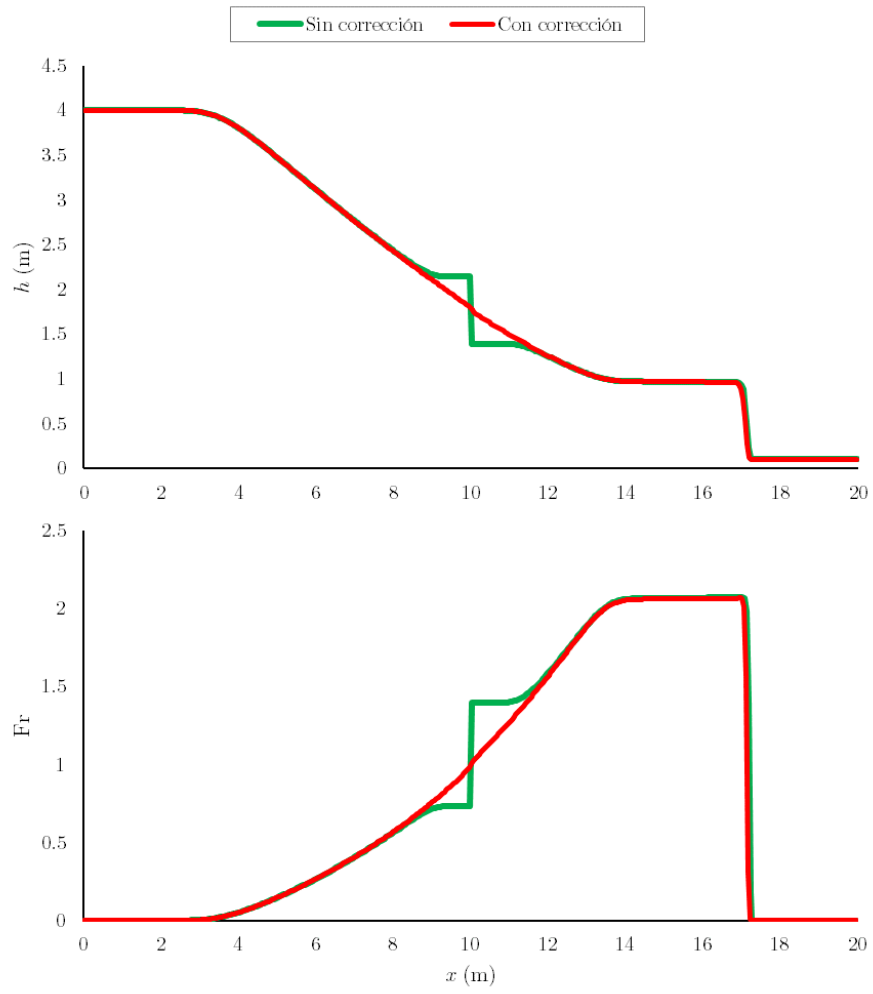


Figura 11. Caso específico en el que se muestra el salto de la solución y su corrección. Se observa como el  $Fr$  es mayor que 1 (Flujo supercrítico). Caso:  $h_L = 4$  m;  $h_R = 0,1$  m;  $z_L = 0$  m;  $z_R = 0$  m;  $u_L = 0$  m;  $u_R = 0$  m;  $CFL = 0,5$ ;  $\Delta x = 0,1$  m;  $T = 1$  s

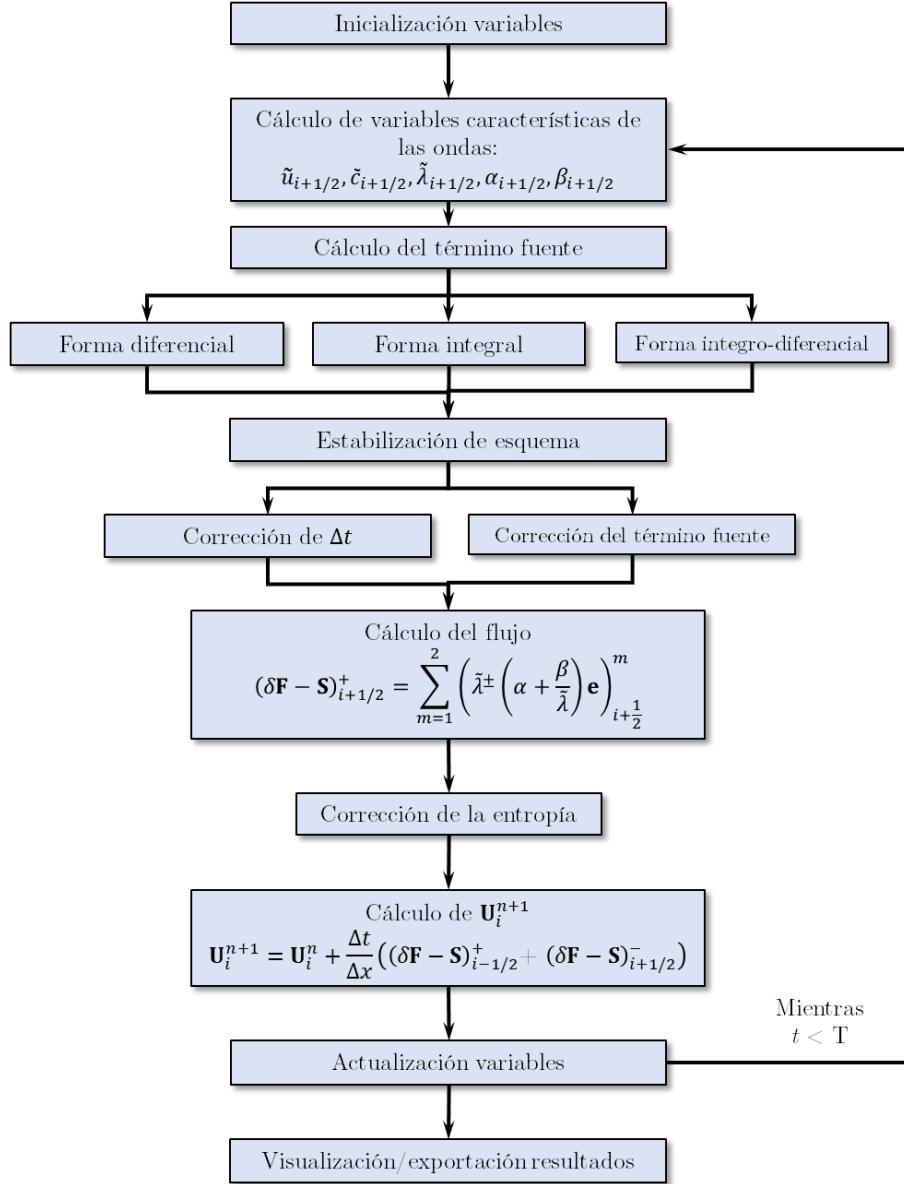


Figura 12. Algoritmo del código de volúmenes finitos.

### 4.3. Algoritmo para elementos finitos

Este código en concreto se basa en lo encontrado en el artículo (Montilla, y otros 2020). Los pasos a seguir dentro de este código son los siguientes:

1. El primero y común a todos el de inicializar las variables y las condiciones iniciales del problema a simular. Para este código resulta interesante trabajar con estructuras de MATLAB para cada celda, por lo que todas las variables de interés se definen dentro de cada estructura.
2. Se realizan tareas y cálculos previos al bucle temporal, como son la de los cálculos de las constantes  $a_k$  y la proyección al elemento de referencia, que no dependen del tiempo.

3. Bucle temporal:

- a. Se calcula el paso de tiempo a partir de la velocidad máxima
- b. Se definen variables auxiliares a partir de los datos iniciales necesarias para los siguientes pasos.
- c. Se calculan los flujos numéricos. Para este caso se implementa el flujo numérico HLLS:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^- = \begin{cases} \mathbf{F}_{i_R} & si \quad \lambda^1 \geq 0 \\ \mathbf{F}_{i_R}^{-,sub} & si \quad \lambda^1 \leq 0 \leq \lambda^2 \\ \mathbf{F}_{i+1_L} - \bar{\mathbf{S}}_{i+1/2} & si \quad \lambda^2 \leq 0 \end{cases} \quad Ec. 68$$

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^+ = \begin{cases} \mathbf{F}_{i_R} + \bar{\mathbf{S}}_{i+1/2} & si \quad \lambda^1 \geq 0 \\ \mathbf{F}_{i+1_L}^{+,sub} & si \quad \lambda^1 \leq 0 \leq \lambda^2 \\ \mathbf{F}_{i+1_L} & si \quad \lambda^2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{F}_{i_R}^{-,sub} = \frac{(\lambda^2 \mathbf{F}_{i_R} - \lambda^1 \mathbf{F}_{i+1_L}) + \lambda^1 \lambda^2 \delta \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}} + \lambda^1 (\bar{\mathbf{S}}_{i+\frac{1}{2}} - \lambda^2 \bar{\mathbf{M}}_{i+\frac{1}{2}})}{\lambda^2 - \lambda^1} \quad Ec. 69$$

$$\mathbf{F}_{i_R}^{+,sub} = \frac{(\lambda^2 \mathbf{F}_{i_R} - \lambda^1 \mathbf{F}_{i+1_L}) + \lambda^1 \lambda^2 \delta \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}} + \lambda^2 (\bar{\mathbf{S}}_{i+\frac{1}{2}} - \lambda^1 \bar{\mathbf{M}}_{i+\frac{1}{2}})}{\lambda^2 - \lambda^1}$$

- d. Tras el cálculo del flujo se hacen las integrales del flujo y del término fuente a través de la cuadratura de Gauss, para lo cual se han definido con anterioridad los puntos de cuadratura de Gauss (Figura 4)

$$\int_{C_i} \mathbf{F}(\mathbf{U}) \frac{\partial \phi_k}{\partial x} dx \approx \sum_{q=1}^{ngp} \left( \mathbf{F}(\mathbf{U}) \frac{\partial \phi_k}{\partial x} |T_i| \right)_q \omega_q \quad Ec. 70$$

$$\int_{C_i} \phi_k \mathbf{S} dx \approx \sum_{q=1}^{ngp} (\phi_k \mathbf{S} |T_i|)_q \omega_q$$

Donde  $T_i$  es el determinante de la matriz jacobiana asociada al cambio de base del elemento de referencia al elemento real. Ya que el elemento de referencia en el caso 1D va de  $[-1,1]$ ,  $T_i = \Delta x/2$ , y  $\omega_q$  son los pesos de cada punto de la cuadratura.

- e. Tras esto se calcula la solución para el siguiente paso temporal y se reconstruye la solución, ya que este proceso se ha hecho en la base proyectada. Para este cálculo se emplea el método SSP-RK (*Strong Stability Preseving Runge Kuta*) de tercer orden:

$$\hat{\mathbf{U}}_{i,k}^{(1)} = \mathbf{U}_{i,k}^n - \Delta t \mathcal{L}(\mathbf{U}^n, \mathbf{S}^n)$$

$$\hat{\mathbf{U}}_{i,k}^{(2)} = \frac{3}{4} \hat{\mathbf{U}}_{i,k}^n + \frac{1}{4} \left( \hat{\mathbf{U}}_{i,k}^{(1)} - \Delta t \mathcal{L}(\mathbf{U}^{(1)}, \mathbf{S}^{(1)}) \right) \quad Ec. 71$$

$$\hat{\mathbf{U}}_{i,k}^{n+1} = \frac{1}{3} \hat{\mathbf{U}}_{i,k}^n + \frac{2}{3} \left( \hat{\mathbf{U}}_{i,k}^{(2)} - \Delta t \mathcal{L}(\mathbf{U}^{(2)}, \mathbf{S}^{(2)}) \right)$$

- f. Se actualizan las variables para poder repetir el bucle temporal.
4. Se repite el bucle temporal del punto 3 hasta que la simulación llega al tiempo establecido.
5. Se muestran o exportan los datos y la simulación acaba.

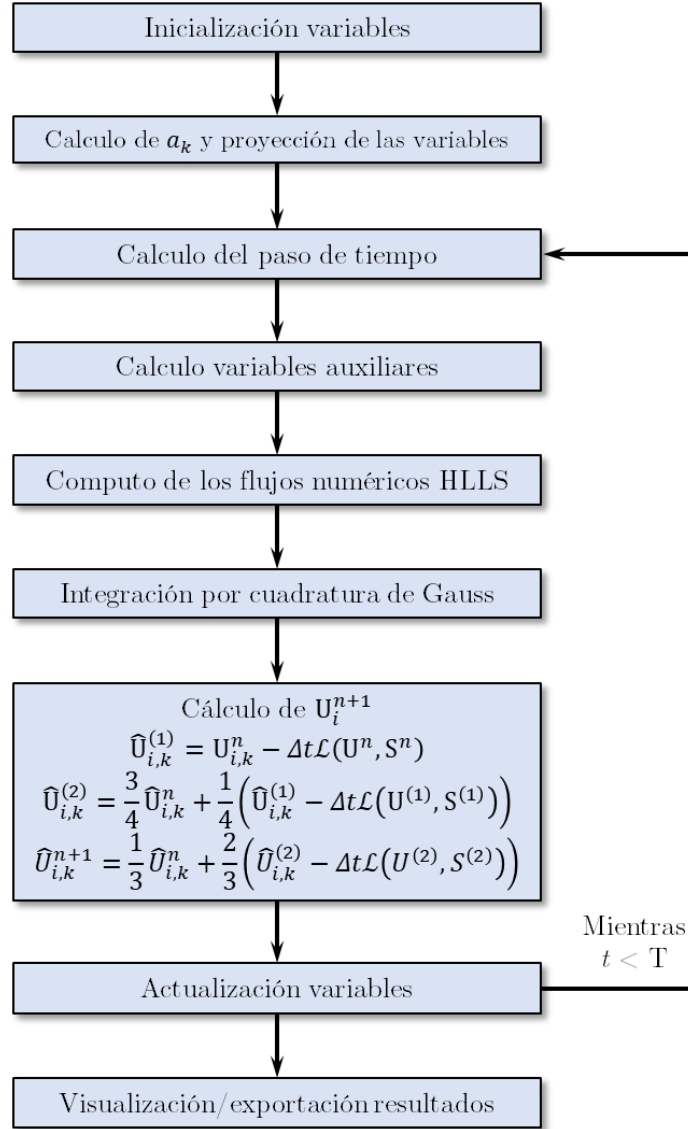


Figura 13. Algoritmo del código de elementos finitos

#### 4.3.1. Limitaciones del esquema

Este esquema presenta problemas de estabilidad, como ocurrió con el esquema en diferencias finitas. Para aproximaciones con  $k = 2$  y  $3$  aparecen oscilaciones a cerca de las discontinuidades. En la Figura 14 se muestran los valores obtenidos dentro de cada celda para el caso 4 descrito en el apartado 5. Se ha utilizado este caso como referencia, ya que permite realizar una comparación entre los tres esquemas. Esto se debe precisamente a las oscilaciones numéricas para el resto de los casos en los que no es

posible obtener una solución. Las oscilaciones se vuelven tan grandes que la altura de la lámina de agua toma valores negativos produciendo como solución valores imaginarios, ya que  $c$  es la raíz cuadrada de la altura.

Para solucionar esto hay que incluir un algoritmo adicional, en este caso un limitador de pendiente o Slope Limiting procedure, en la que se implementa el limitar la solución en las discontinuidades. (Tu y Aliabadi 2005)

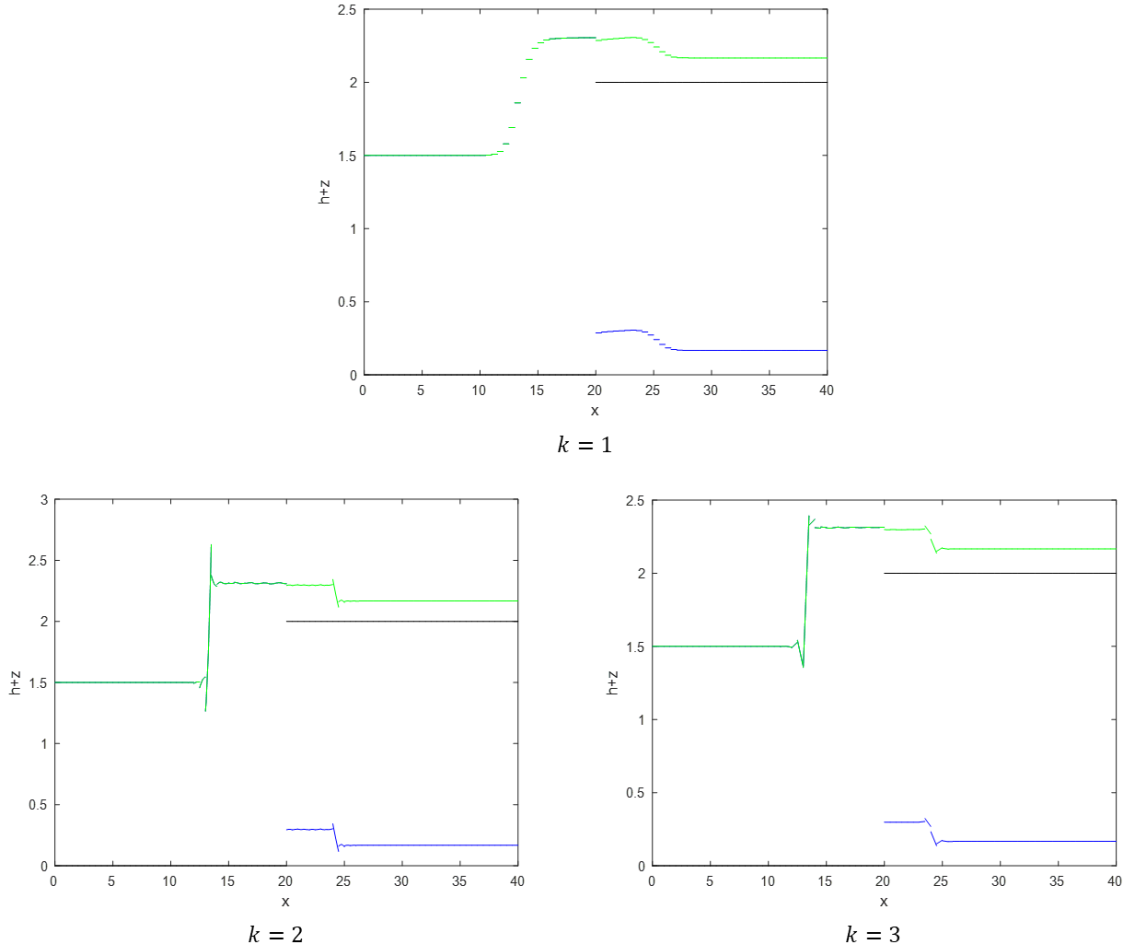


Figura 14. Oscilaciones presentes en el esquema de EF. Obtenidas de MATLAB.

## 4.4. Condiciones de contorno

Como ya se ha comentado en el apartado 2.4, de igual manera se pueden definir condiciones en los contornos del dominio. Para este trabajo se han implementado dos situaciones en los que es necesario un tratamiento especial de los límites del dominio definido.

### 4.4.1. Condición de pared

Se trata de emular la condición de una pared sólida en el límite del dominio. Se va a considerar que el agua al llegar a la última celda rebota generando en el caso de un



choque o produce una rarefacción. Para lograr implementar las condiciones de pared se han usado los invariantes de Riemann. Estos invariantes son variables que no cambian a lo largo de un determinado camino dentro del dominio espaciotemporal del problema. Para el caso de las SWE estos invariantes son:

$$r_1 = u + 2c \quad \text{Ec. 72}$$

$$r_2 = u - 2c \quad \text{Ec. 73}$$

Siendo las trayectorias en el plano  $x-t$  respectivamente:

$$\frac{dx}{dt} = u + c \quad \text{Ec. 74}$$

$$\frac{dx}{dt} = u - c \quad \text{Ec. 75}$$

Para trasladar este concepto al plano discreto y a los esquemas numéricos aquí presentados es necesario definir un flujo numérico en la pared. Una forma alternativa al uso de los invariantes es el uso de celdas “imaginarias” en los extremos del dominio.

A través de los invariantes se puede calcular el valor de la altura exactamente en la pared mediante la relación (Figura 14):

$$u(x_{N_x}, t^n) \pm c(x_{N_x}, t^n) = 0 \pm c_p \quad \text{Ec. 76}$$

Por lo tanto, la forma final del invariante a emplear cambia en función de en qué tipo de contorno estamos.

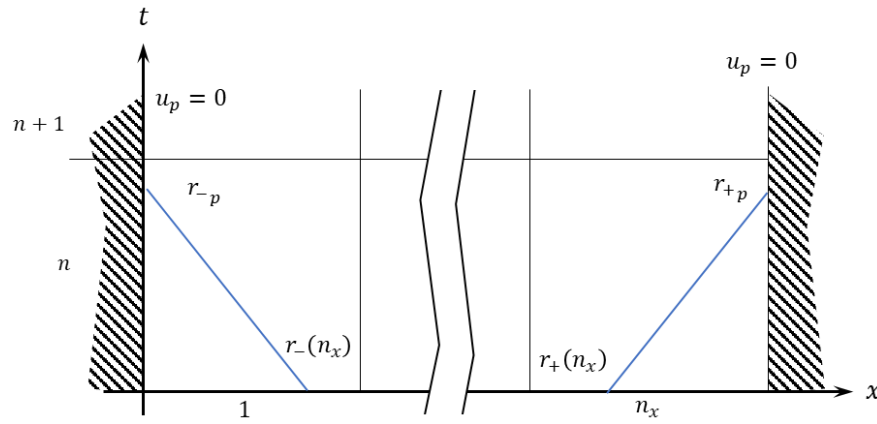


Figura 15. Celdas contiguas a las paredes e invariante específico para cada celda

El mismo procedimiento servirá para el extremo final (pared  $N_x + 1/2$ , donde  $N_x$  es la última celda) como para el inicial (pared  $1 - 1/2$ ) respectivamente.

Para el código de volúmenes finitos definimos los flujos que vendrán dados por:

$$(\delta \mathbf{F} - \mathbf{S})_{1-1/2}^+ = \mathbf{F}(h_p, 0) - \mathbf{S}(h_p, 0) \quad \text{Ec. 77}$$

$$(\delta \mathbf{F} - \mathbf{S})_{N_x+1/2}^- = \mathbf{F}(h_p, 0) - \mathbf{S}(h_p, 0) \quad \text{Ec. 78}$$

Para el código de Diferencias Finitas el flujo se calcula directamente de la Ec. 12, sustituyendo con  $h_p$ . Para la última celda solo será necesario calcular el *predictor* ya que el corrector no cambia y viceversa en la primera celda.

$$\mathbf{U}_{p,N_x}^{n+1} = \mathbf{U}_{p,N_x}^n - \lambda \left( \mathbf{F}(h_{N_x}, u_{N_x}) - \mathbf{F}(h_p, 0) \right) + \Delta t \mathbf{S}_{N_x} \quad Ec. 79$$

$$\mathbf{U}_{c,1}^{n+1} = \mathbf{U}_{c,N_x}^n - \lambda \left( \mathbf{F}(h_p, 0) - \mathbf{F}(h_1, u_1) \right) + \Delta t \mathbf{S}_1 \quad Ec. 80$$

#### 4.4.2. Caso estacionario

Adicionalmente al caso anterior se ha definido otro problema en donde entra un flujo constante por un extremo del dominio y el fluido alcanza el equilibrio. Este caso específico nos permitirá comprobar si estos métodos también son capaces de obtener una solución estacionaria con un primer periodo transitorio. La única condición inicial para imponer será la del flujo en la primera celda.

Para obtener la solución exacta y poder comparar se resuelve la ecuación de la energía (altura energética en este caso  $H$ ) para cada punto obteniendo para cada celda  $h_i$ .

$$H_L = h_1 + z_1 + \left( \frac{q_1}{h_1} \right)^2 \frac{1}{2g} = h_i + z_i + \left( \frac{q_1}{h_i} \right)^2 \frac{1}{2g} \quad Ec. 81$$

## 5. Comparación de los esquemas

### 5.1. Saltos hidráulicos. Condiciones iniciales del tipo de problema de Riemann.

Una vez se han definido todos los algoritmos, se presentan una serie de casos con condiciones iniciales del tipo de problema de Riemann para analizar distintos aspectos de los esquemas numéricos. Los casos presentados son los siguientes:

*Tabla 1. Condiciones iniciales para cada caso*

Caso	$h_L$ (m)	$h_R$ (m)	$u_L$ (m/s)	$u_R$ (m/s)	$z_L$ (m)	$z_R$ (m)
<b>1</b>	1	0.3	0	0	0	0.05
<b>2</b>	4	0.5	0.1	0	0	1.5
<b>3</b>	2.5	2.5	1.5	0	0	0.25
<b>4</b>	1.5	0.166	2	0	0	2
<b>5</b>	1	0.04	0.2	0	0.25	0
<b>6</b>	0.6	0.026	0.35	0	1.2	0
<b>7</b>	1.1	0.5	4.9	6.5	0.2	0
<b>8</b>	1.5	0	2.28	0	0	4
<b>9</b>	1.5	0	4.5	0	0	4
<b>10</b>	1.5	0	-2.5	0	0	1
<b>11</b>	1.5	0	-5	0	0	1

La longitud tomada del canal es la misma para los 11 casos, 40 m, quedando las condiciones iniciales definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 h_0(x) &= \begin{cases} h_L & \text{si } x < 20 \\ h_R & \text{si } x \geq 20 \end{cases} \\
 u_0(x) &= \begin{cases} u_L & \text{si } x < 20 \\ u_R & \text{si } x \geq 20 \end{cases} \\
 z(x) &= \begin{cases} z_L & \text{si } x < 20 \\ z_R & \text{si } x \geq 20 \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{Ec. 82}$$

Las dos variables principales que afectan a la simulación es el tamaño de discretización de la malla  $\Delta x$  y el coeficiente CFL. Para ello se ha propuesto como punto de partida fijar tanto  $\Delta x$  como el CFL en 0.5, y comparar este caso con uno en el que se reduce  $\Delta x$  a 0.05 manteniendo el CFL en 0.5 y viceversa,  $\Delta x = 0.5$  y CFL = 0.05. De esta forma se pretende apreciar como variando uno de los parámetros afecta este a la solución de cada caso, todos ellos para un tiempo de simulación de 2 segundos.

Los resultados que se muestran de VF y EF son el promedio de los valores dentro de cada celda. Para el caso de VF y EF con  $k = 1$  este valor coincide con los valores de cada celda, pero para EF  $k = 2$  y 3 no (ver Figura 14).

Tanto el caso 1 como el 2 son problemas del tipo de rotura de presa. Las condiciones iniciales son dos columnas de agua con velocidad nula a distinta altura. El escalón del fondo del canal es mayor en el caso 2 y la solución para ambos casos consiste en un

choque que avanza hacia la derecha, una rarefacción que se desplaza hacia la izquierda y un choque estacionario producido por el escalón del fondo. En la Figura 16 se muestra la solución para el caso 1. VF y DG-EF1 simulan bien en las tres ocasiones mientras que DF se aleja de la solución al llegar al choque estacionario y no es capaz de simular para el CFL de 0.05. Por otro lado, solo se obtiene solución con DG-EF2 y DG-EF3 para el CFL pequeño y no coincide con la exacta. En la Figura 17 observamos lo mismo para el caso 2 solo que aquí con DG-EF2 y DG-EF3 si obtenemos una solución cercana a la exacta.

En el caso 3 y el 4 se tienen tres choques con flujo convergente. La solución consiste en un choque hacia la derecha, otro hacia la izquierda y el estacionario en el medio del dominio por el efecto del fondo discontinuo. En la Figura 18 se muestra la solución para el caso 3 y en la Figura 19 para el caso 4. Los resultados obtenidos son similares, VF y DG-EF1 consiguen aproximarse mucho a la solución exacta mientras que DF no consigue converger hacia la solución, magnificando el choque estacionario para el caso 3 y no puede simularse para el caso 4 con este método. DG-EF2 y DG-EF3 ofrecen una buena solución en ambos casos, pero solo para la situación de CFL bajo (como en el resto de los casos).

Los casos 5 y 6 son de nuevo casos de rotura de presa, pero la columna de agua de la izquierda tiene velocidad inicial y mayor altura del lecho que la derecha y la diferencia del salto de agua es mayor en el caso 6. La solución tanto para el caso 5 (Figura 20) como para el caso 6 (Figura 21) consiste en una rarefacción desplazándose hacia la izquierda, un choque hacia la derecha y un choque estacionario en el salto del fondo. La presencia de este escalón disipa parte de la energía (J. Murillo 2010). De nuevo solo VF y DG-EF1 consiguen dar una solución cercana a la exacta en ambos casos y para las tres situaciones. DF no es capaz de simularse en el caso 6 y solo ofrece solución para el caso 5 con CFL de 0.5. Lo mismo ocurre para DG-EF2 pero para CFL de 0.05 y una solución muy alejada de la exacta y oscilante. DG-EF3 no ofrece solución para ningún caso.

El caso 7 se considera un movimiento supercrítico aguas abajo. El escalón del fondo aquí produce que no haya una propagación de ondas aguas arriba y la disipación de parte de la energía (J. Murillo 2010). La solución que se muestra en la Figura 22 consiste en un choque estacionario en el escalón y un choque precedido de una rarefacción que se mueven hacia la derecha. VF y DG-EF1 funcionan correctamente para las tres situaciones y DF consigue simularse para los dos casos con  $\Delta x$  igual a 0.5, ofreciendo una solución oscilante e inexacta. DG-EF2 y DG-EF3 resuelven el caso para CFL 0.05 con una solución muy similar a la exacta.

Los casos del 8 al 11 introducen un salto muy elevado en el fondo del canal para el lado izquierdo que permiten estudiar para el caso 8 y 10 situaciones de mojado/seco y para el 9 y 11 donde la lámina de agua es muy fina en la parte de la izquierda. En el caso 8 un flujo subcrítico choca con el fondo y es reflejado. La solución mostrada en la Figura 23 consiste en un choque que se traslada hacia la izquierda y que solo es capaz de simular VF. El caso 9 es el mismo planteamiento solo que la velocidad del agua es mayor y parte de ella supera el salto del fondo y en la parte derecha hay una pequeña lamina de agua. Por tanto, tenemos en la Figura 24 un choque que se desplaza hacia la izquierda rebotado y otro muy pequeño hacia la derecha. VF ofrece solución para las tres situaciones y DG-EF1 solo para la malla gruesa, aunque con oscilaciones y fallos.

Finalmente, los casos 10 y 11 la columna de agua se desplaza hacia la izquierda. En el caso 10 se da un flujo subcrítico que consiste únicamente en una rarefacción hacia la izquierda como se muestra en la Figura 25. Al igual que para el 8, solo VF consigue

simular el problema, aunque con muy buena aproximación. Para el caso 11 se define una pequeña lámina de agua a la derecha y se fuerza un flujo supercrítico hacia la izquierda. En la Figura 26 se muestra la rarefacción hacia la izquierda, y una pequeña rarefacción hacia la derecha en el lado derecho, con un choque estacionario en el escalón. Solo VF y DG-EF1 consiguen simular este caso, pero con buena aproximación. DG-EF1 comete un ligero fallo justo después del salto del fondo aguas arriba.

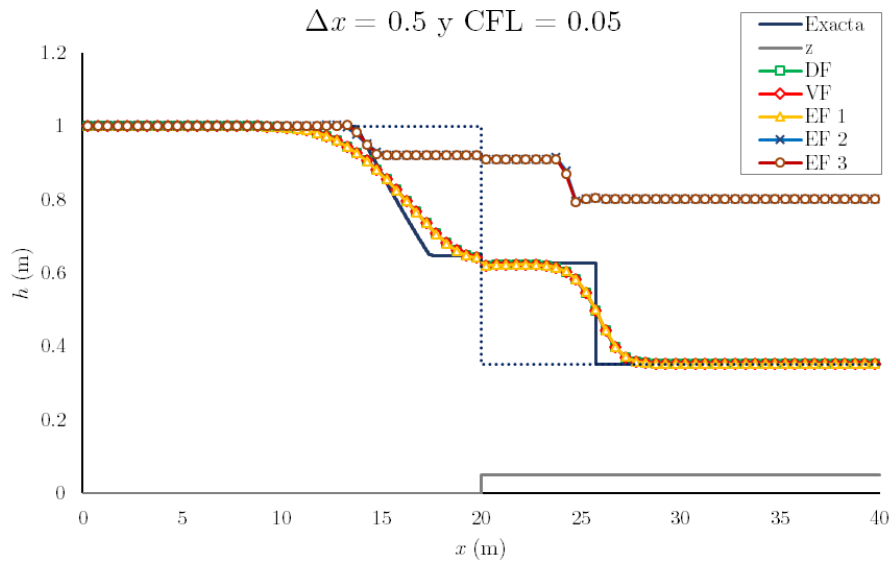
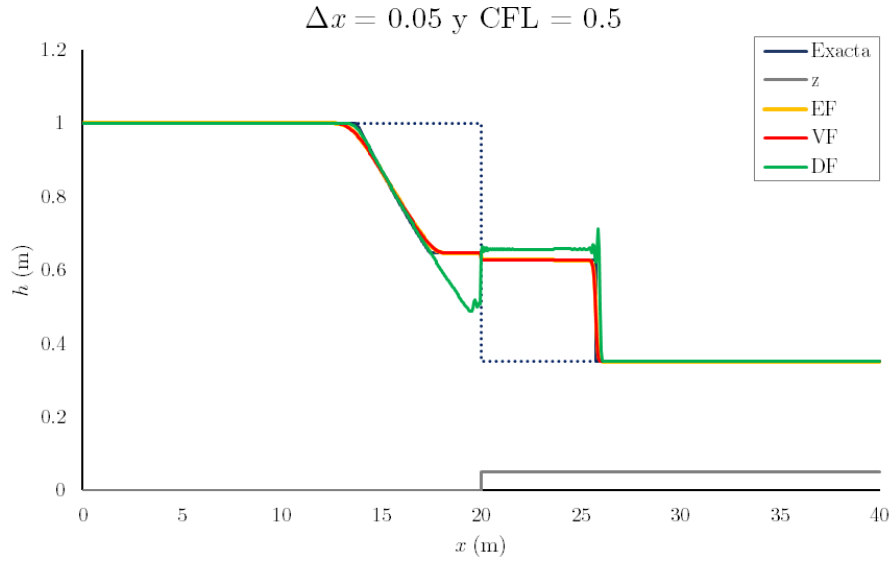
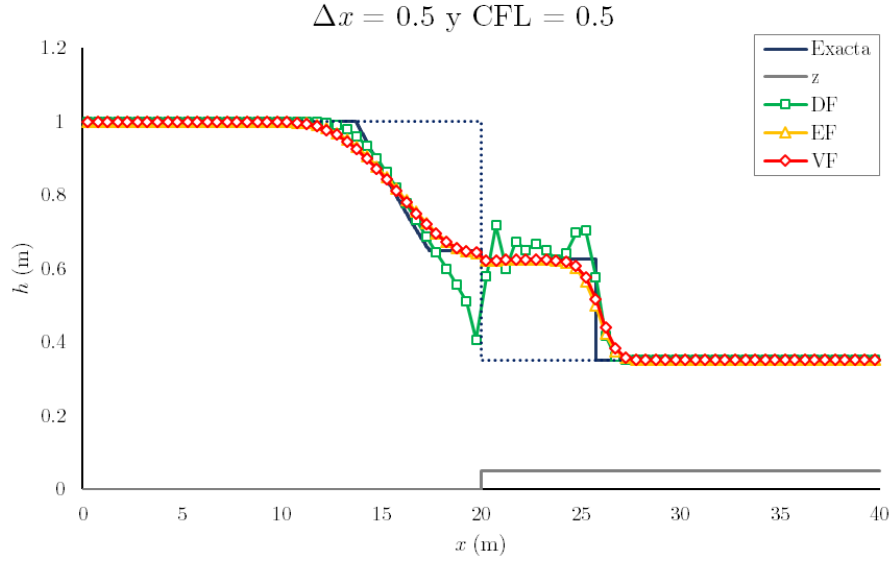


Figura 16. Caso 1. La solución es un choque que se desplaza a la derecha, una rarefacción hacia la izquierda y un choque estacionario a la altura del escalón del fondo del canal.

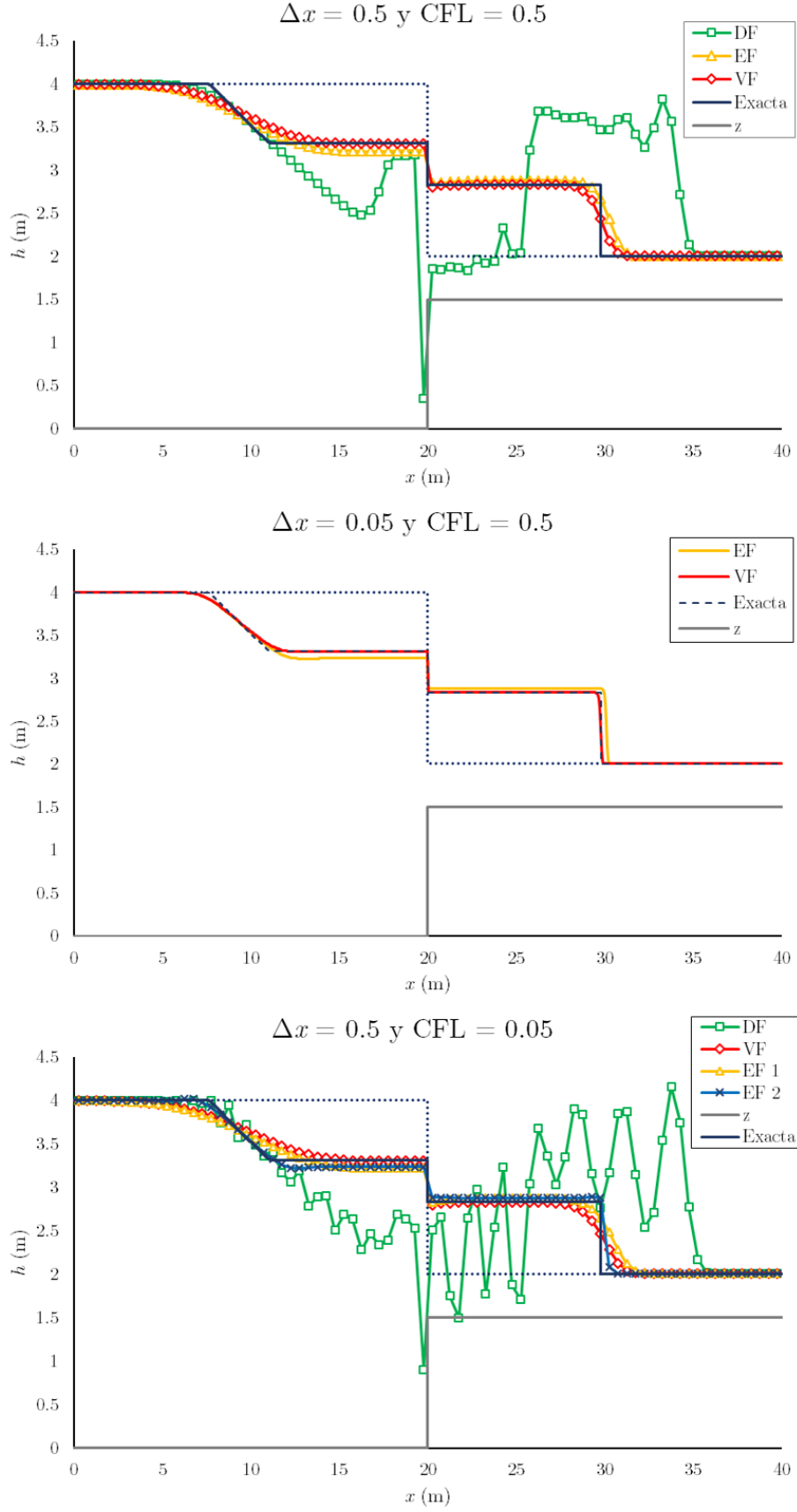


Figura 17. Caso 2. La solución es un choque que se desplaza a la derecha, una rarefacción hacia la izquierda y un choque estacionario a la altura del escalón del fondo del canal.

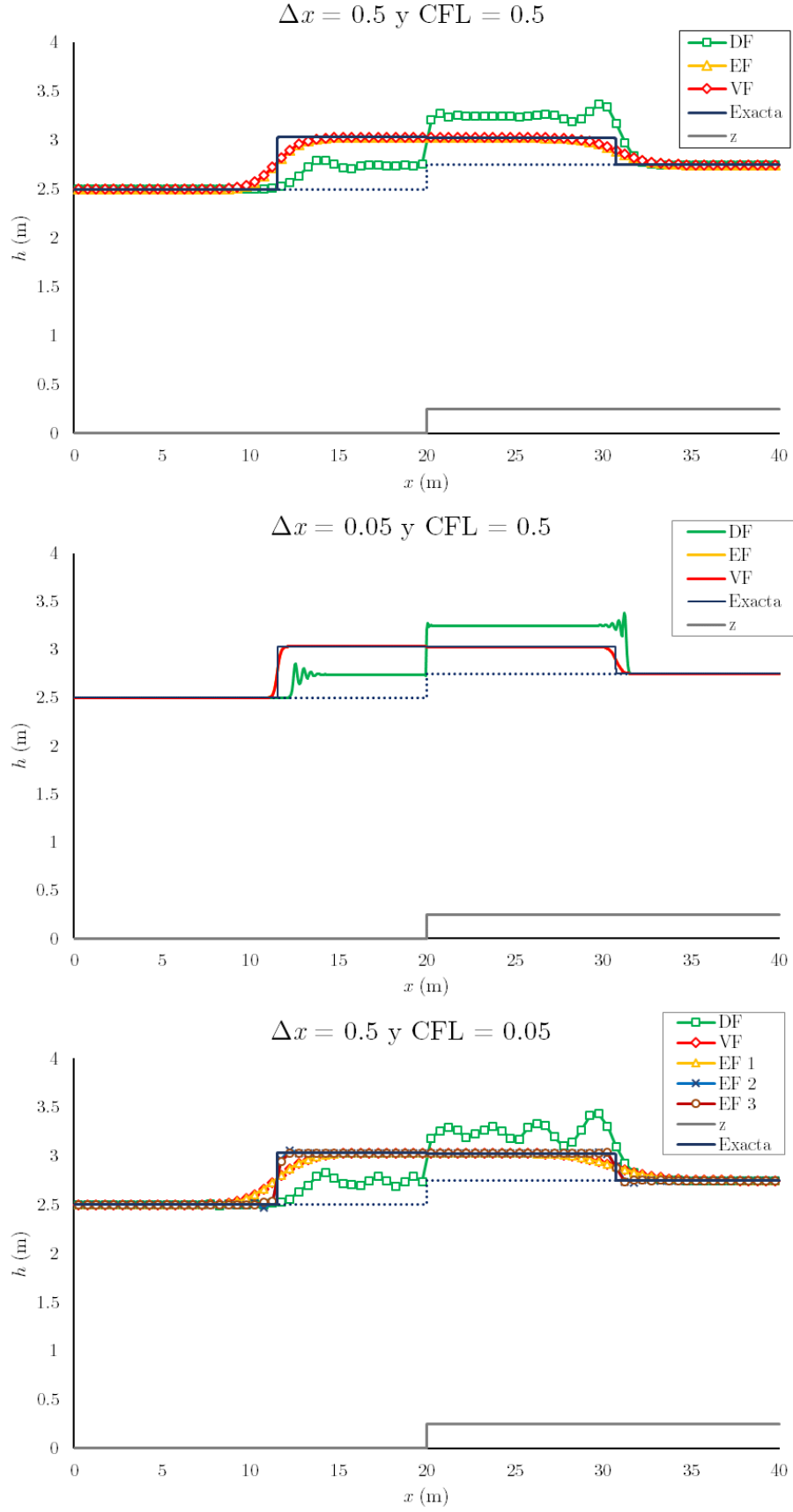


Figura 18. Caso 3. La solución son dos choques, uno hacia cada lado y un choque estacionario a la altura del escalón del fondo del canal



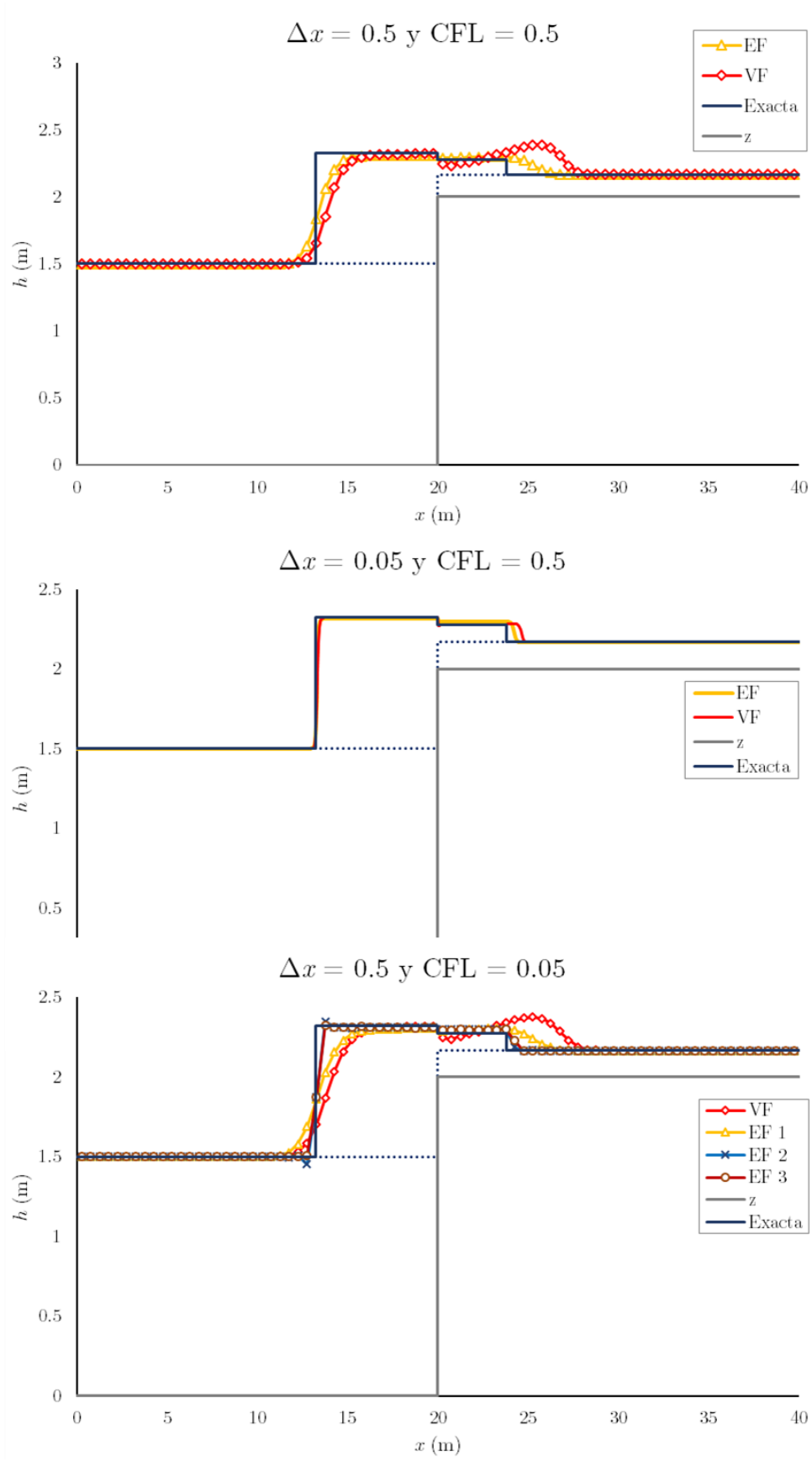


Figura 19. Caso 4. Dos choques que se desplazan en ambos sentidos y el choque estacionario producido por el termino fuente.

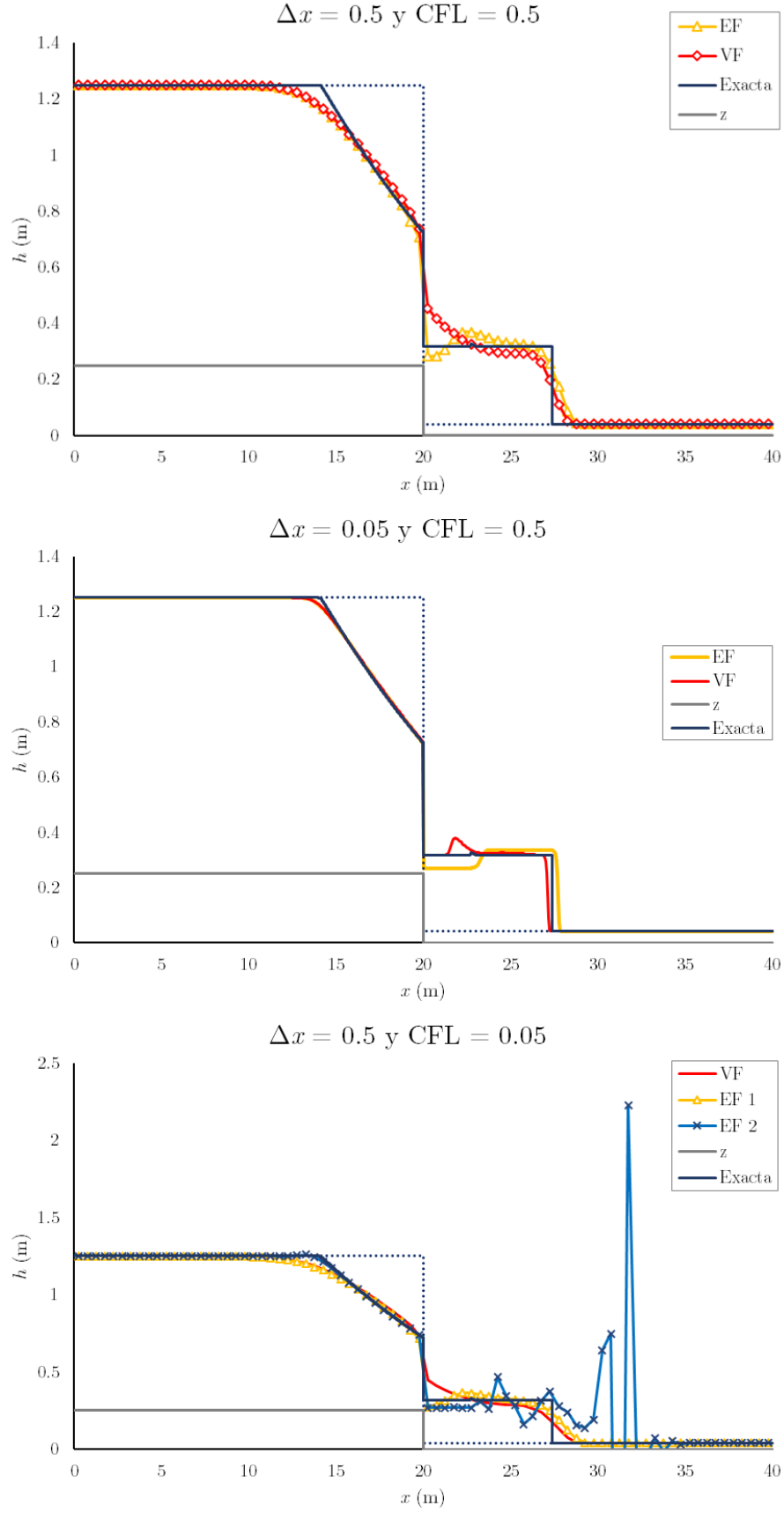


Figura 20. Caso 5. La solución consiste en una rarefacción hacia la izquierda, choque hacia la derecha y choque estacionario central en el salto.

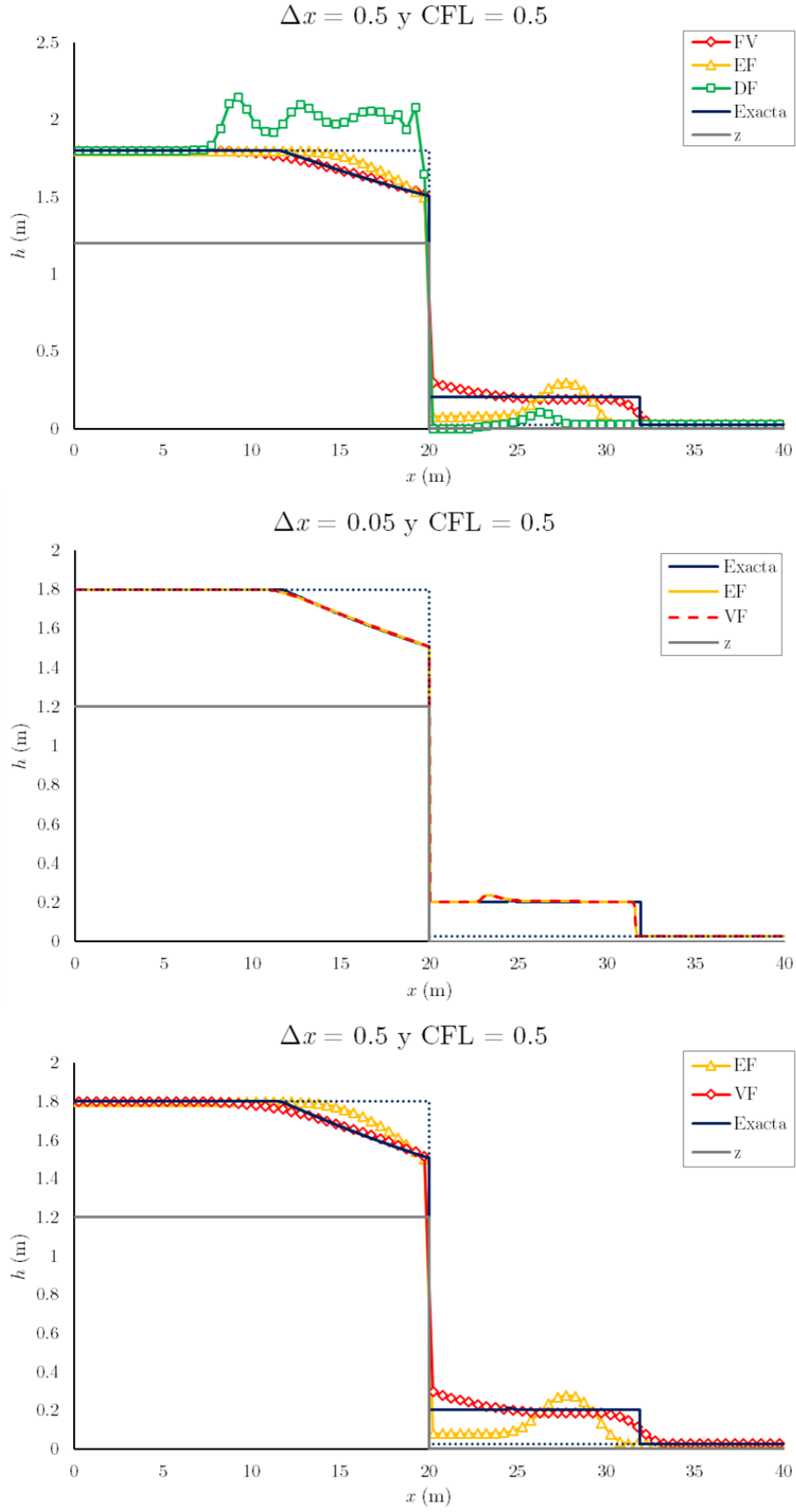


Figura 21. Caso 6. Misma situación que el caso 5 pero con un mayor salto de la altura del agua.

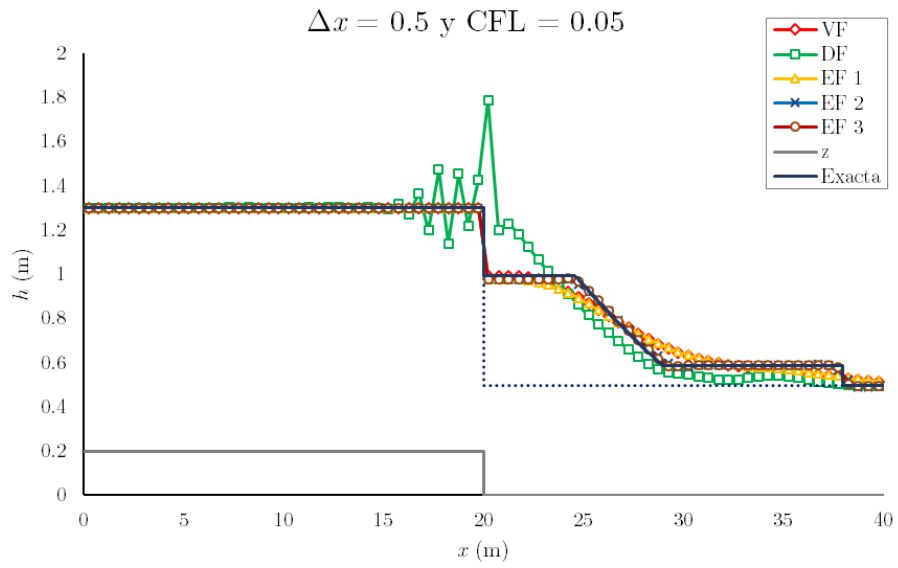
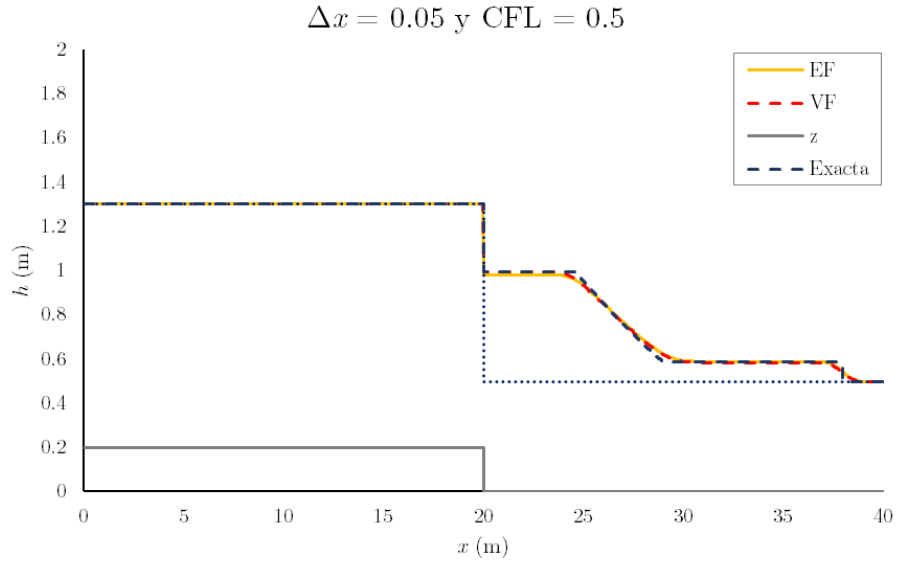
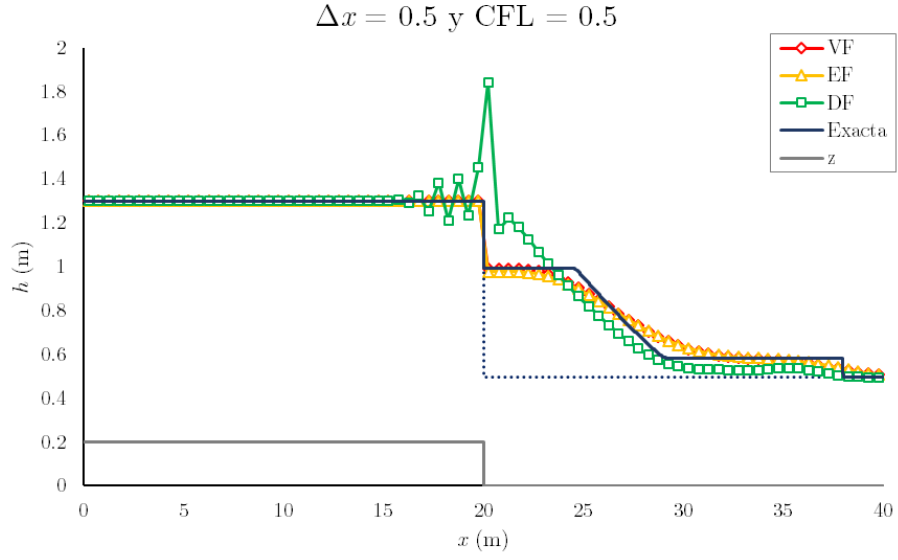


Figura 22. Caso 7. La solución consiste en un choque estacionario en el escalón y una rarefacción y choque hacia la derecha.

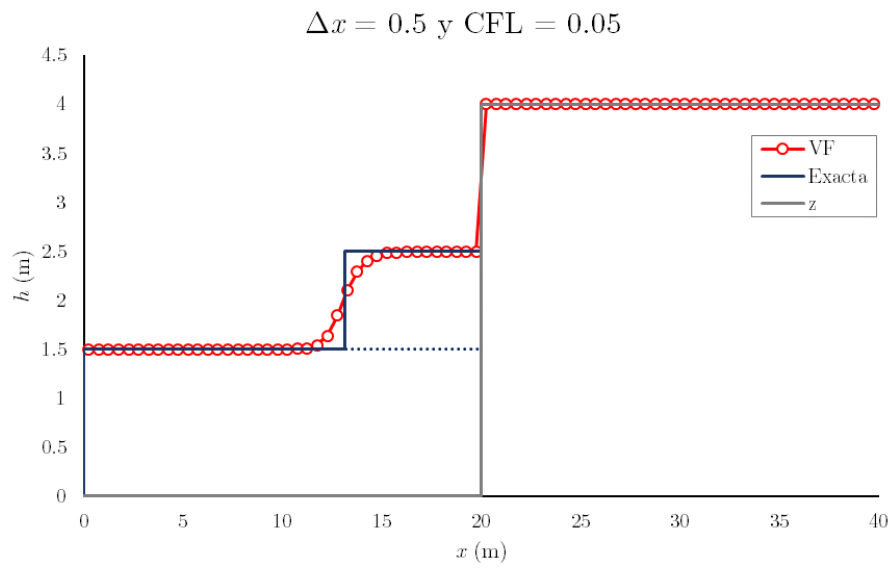
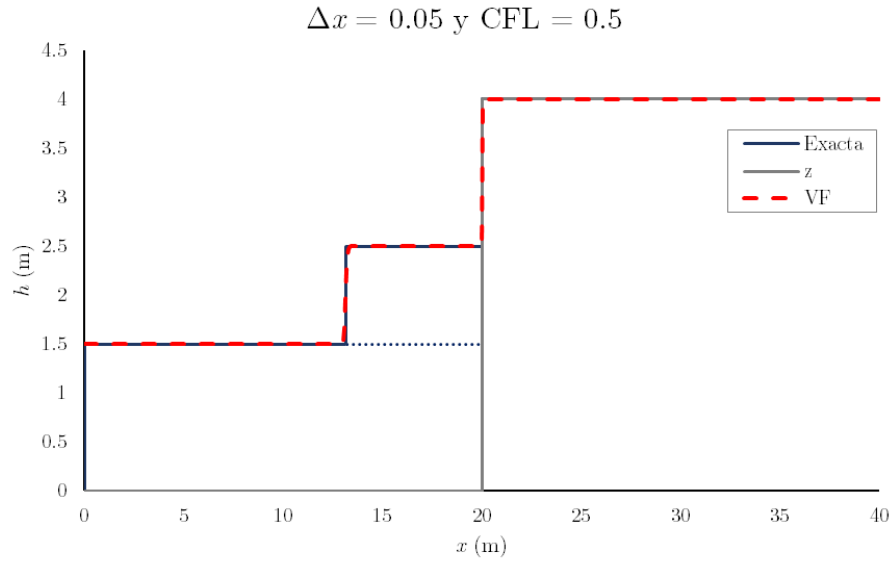
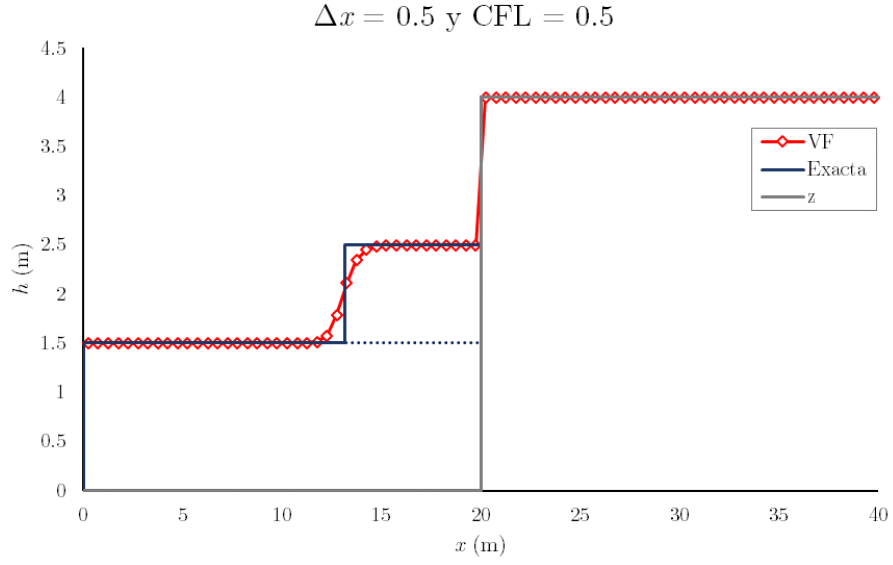


Figura 23. Caso 8. Choque que avanza hacia la izquierda tras “rebotar” contra el lecho del canal.

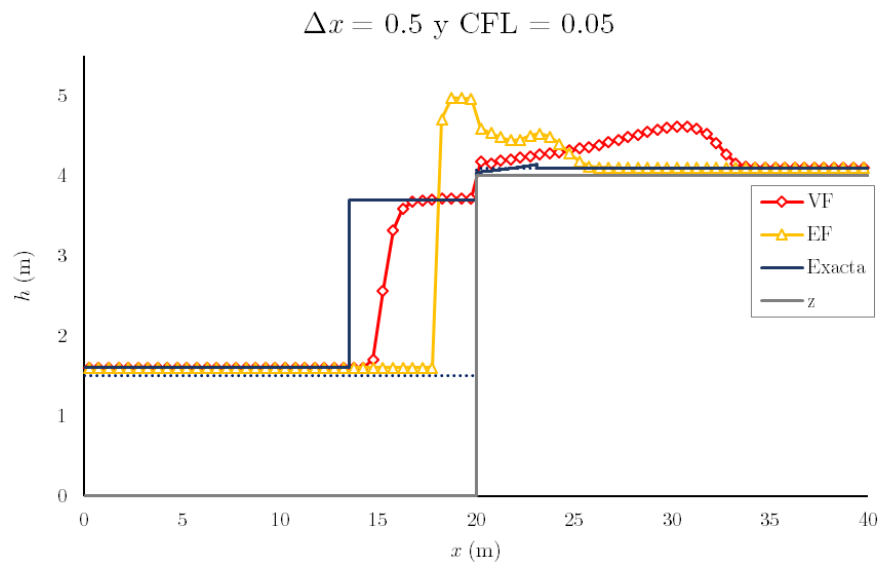
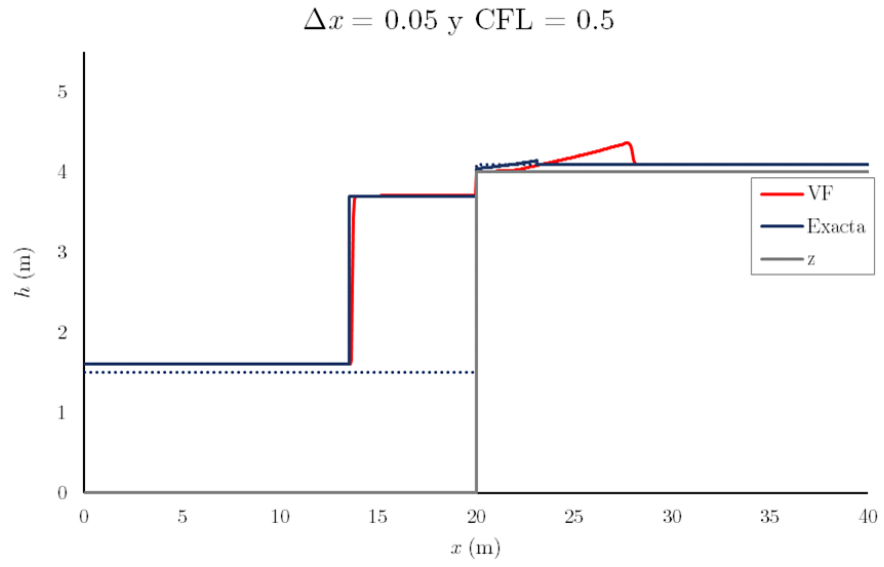
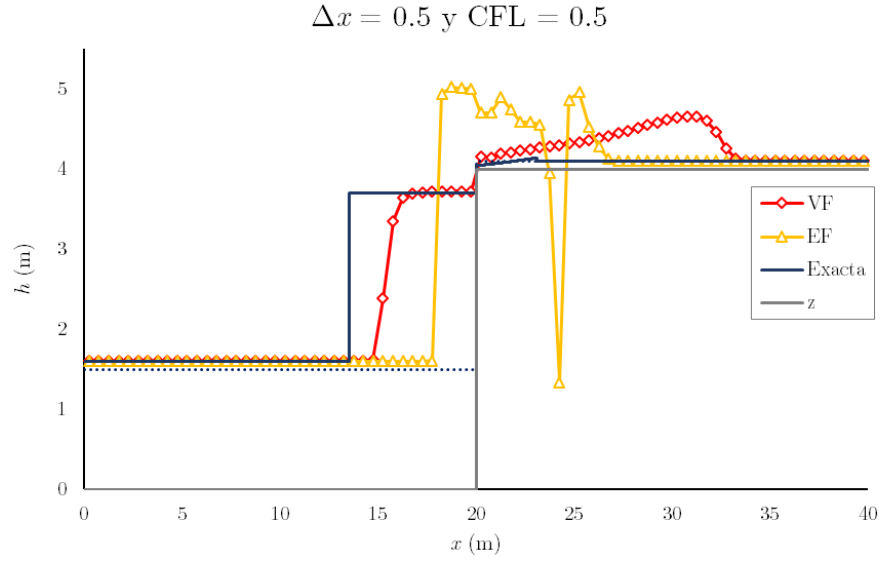


Figura 24. Caso 9. Mismo que caso el anterior pero el agua consigue superar el lecho y se produce un choque que se refleja en el fondo hacia la izquierda y otro hacia la derecha.

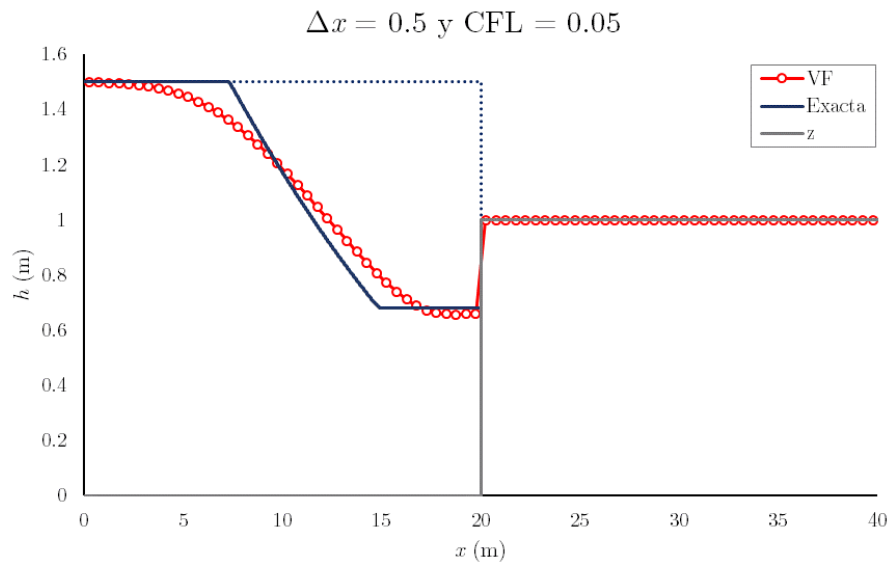
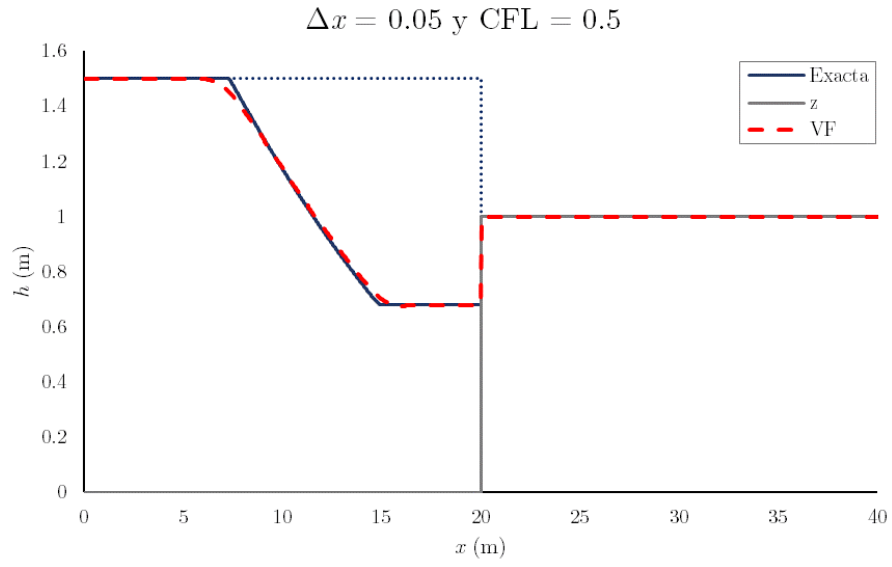
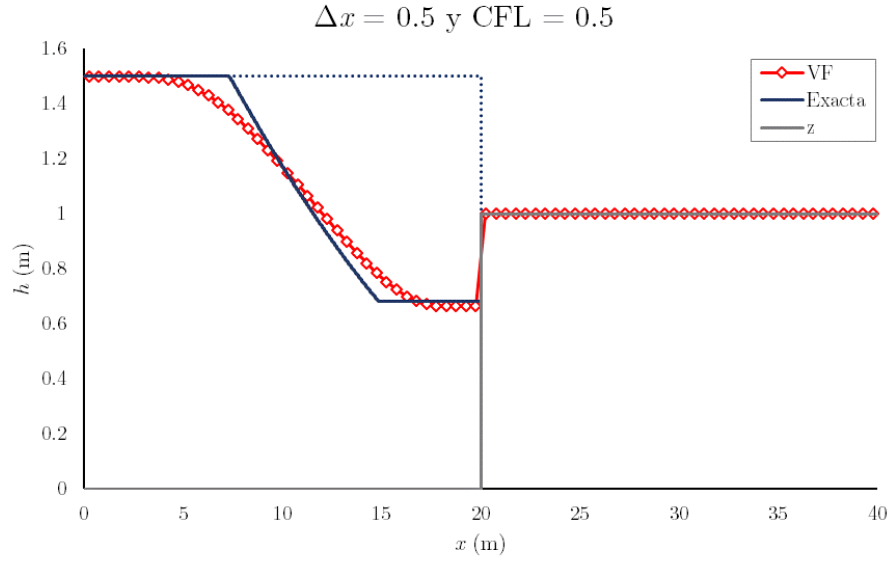


Figura 25. Caso 10. La solución consiste en una rarefacción que se traslada hacia la izquierda.

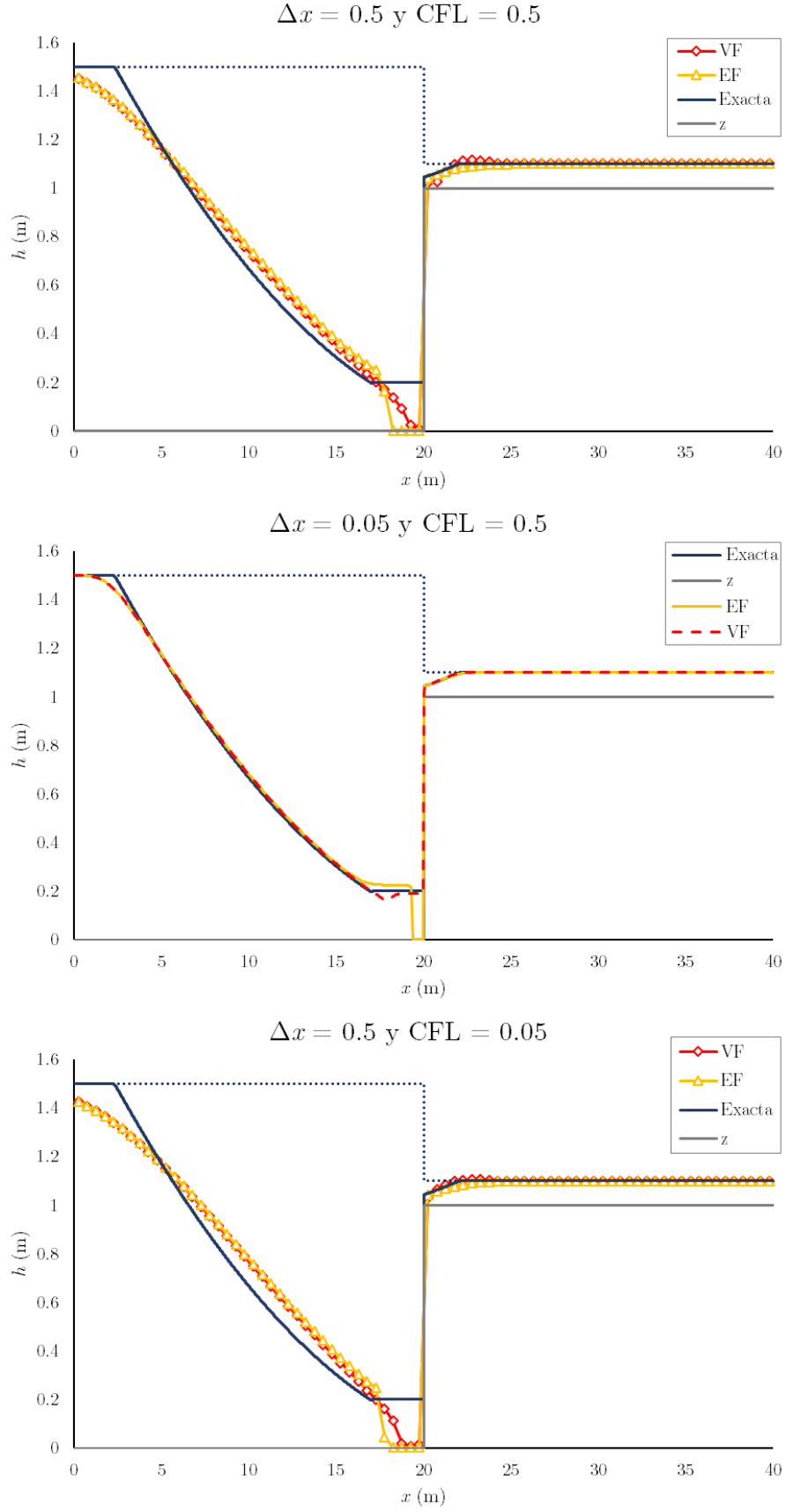


Figura 26. Caso 11. Misma situación que en el caso anterior, pero con agua en el lado derecho, lo que produce una rarefacción que se traslada hacia derecha e izquierda y un choque estacionario.



### 5.1.1. Tiempo de calculo

Se han tomado los tiempos de simulación para cada caso. Estos valores variaran para cada procesador y no deben tomarse como absolutos, pero si los vamos a emplear a modo de comparación.

Tabla 2. Tiempos de cálculo para la solución exacta y para los casos con  $\Delta x = 0.5$  y  $CFL = 0.5$ . Tiempo en segundos.

	Exacta	$\Delta x = 0.5$ y $CFL = 0.5$				
		VF	DF	DG-EF 1	DG-EF 2	DG-EF 3
Caso 1	10346	1,005	3,203	11,622	-	-
Caso 2	9654	1,116	5,659	10,191	-	-
Caso 3	6543	1,402	2,845	10,632	-	-
Caso 4	5748	1,384	-	9,486	-	-
Caso 5	4893	1,365	-	9,221	-	-
Caso 6	4176	1,348	3,376	9,484	-	-
Caso 7	9520	1,434	3,997	11,399	-	-
Caso 8	4039	1,298	-	-	-	-
Caso 9	15313	1,383	-	11,853	-	-
Caso 10	4221	1,079	-	-	-	-
Caso 11	8557	1,539	-	10,806	-	-
Promedio	<b>7546</b>	<b>1,305</b>	<b>3,816</b>	<b>10,522</b>	-	-

Tabla 3. Tiempos de cálculo para los casos con  $\Delta x = 0.05$  y  $CFL = 0.5$ . Tiempo en segundos.

	$\Delta x = 0.05$ y $CFL = 0.5$				
	VF	DF	DG-EF 1	DG-EF 2	DG-EF 3
Caso 1	3,969	3,203	221,341	-	-
Caso 2	6,150	-	271,280	-	-
Caso 3	5,978	29,099	269,318	-	-
Caso 4	5,291	-	263,357	-	-
Caso 5	4,721	-	254,788	-	-
Caso 6	6,970	-	291,141	-	-
Caso 7	7,930	-	304,314	-	-
Caso 8	4,579	-	-	-	-
Caso 9	7,304	-	-	-	-
Caso 10	4,337	-	-	-	-
Caso 11	7,576	-	273,777	-	-
Promedio	<b>5,892</b>	<b>16,151</b>	<b>268,665</b>	-	-

Tabla 4. Tiempos de cálculo para los casos con  $\Delta x = 0.5$  y  $CFL = 0.05$ . Tiempo en segundos.

$\Delta x = 0.5$ y $CFL = 0.05$					
	VF	DF	DG-EF 1	DG-EF 2	DG-EF 3
Caso 1	1,599	18,197	13,278	27,507	56,582
Caso 2	2,015	53,552	15,899	38,981	-
Caso 3	1,915	29,350	17,393	38,064	100,018
Caso 4	1,814	-	14,218	37,714	97,824
Caso 5	1,512	-	13,315	75,949	-
Caso 6	2,044	-	15,375	-	-
Caso 7	2,214	34,575	20,546	56,108	141,502
Caso 8	1,763	-	-	-	-
Caso 9	2,077	-	32,976	-	-
Caso 10	1,578	-	-	-	-
Caso 11	2,262	-	19,762	-	-
Promedio	<b>1,891</b>	<b>33,919</b>	<b>18,085</b>	<b>45,721</b>	<b>98,982</b>

Los tiempos de cálculo para la solución son muy elevados (2 horas en promedio), por lo que resulta muy poco práctico resolver con una malla tan fina aun obteniendo la solución exacta. Se ve una tendencia clara en cuanto a la optimización del tiempo. El método más rápido es el de VF. Lo lógico hubiera sido que lo fuera el de DF debido a su simplicidad, pero como se comentó en el apartado 4.1.1 las oscilaciones y picos en la velocidad lastran la velocidad de simulación. Era de esperar que el método de EF fuera el más lento debido a la estructura de su algoritmo, llegando a ser hasta 50 veces más lento que VF en el caso de la malla fina ( $\Delta x = 0.05$ ). A continuación, se muestra un grafica en la que se plasman estas diferencias de tiempo.

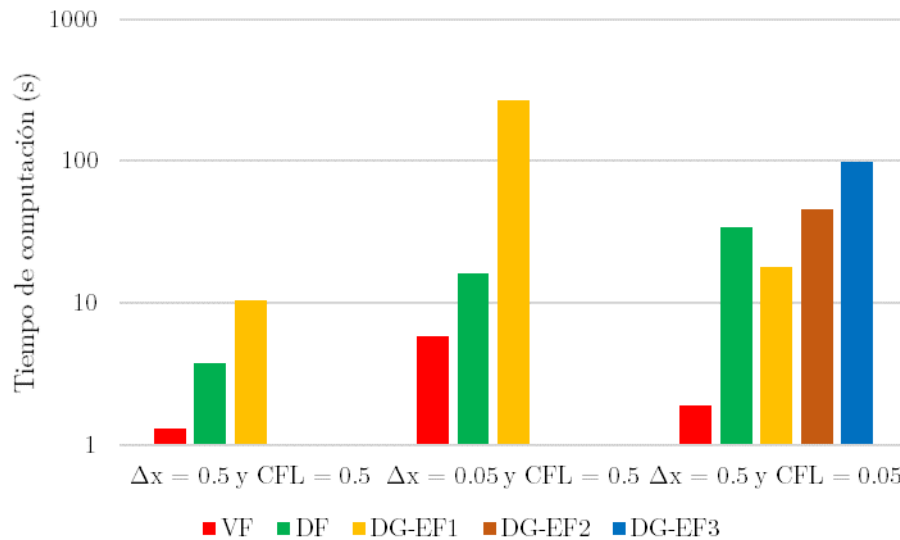


Figura 27. Tiempo promedio de cálculo para cada caso y método. (Escala logarítmica)

De la gráfica vemos como el tiempo prácticamente se incrementa de forma logarítmica entre los métodos para cada caso. Se observa la misma tendencia entre los métodos de EF para el caso de  $\Delta x = 0.5$  y  $CFL = 0.05$ . Como era de esperar para la malla fina el tiempo de computación se incrementa considerablemente.

## 5.2. Condiciones de contorno

### 5.2.1. Condición de pared

Se van a simular un par de casos simples comparando cómo evoluciona la solución para VF y DF con las condiciones de contorno descritas en el apartado 4.4.1. Las condiciones iniciales para este caso se son las siguientes:

$$h_L = 2 \text{ m}; h_R = 2 \text{ m}; u_L = 0.5 \text{ m/s}; u_R = -0.5 \text{ m/s}; z_L = 0 \text{ m}; z_R = 0 \text{ m}; \\ \Delta x = 0,2 \text{ m}$$

En la Figura 28 se muestra la evolución temporal para VF y DF. Para este caso se mantienen las oscilaciones vistas en DF, pero la condición de contorno impuesta se cumple durante toda la simulación. Como no hay disipación de la energía una vez se pasa un primer periodo transitorio se llega a un periodo estacionario donde la solución oscila en periodos de 9 segundos para este caso.

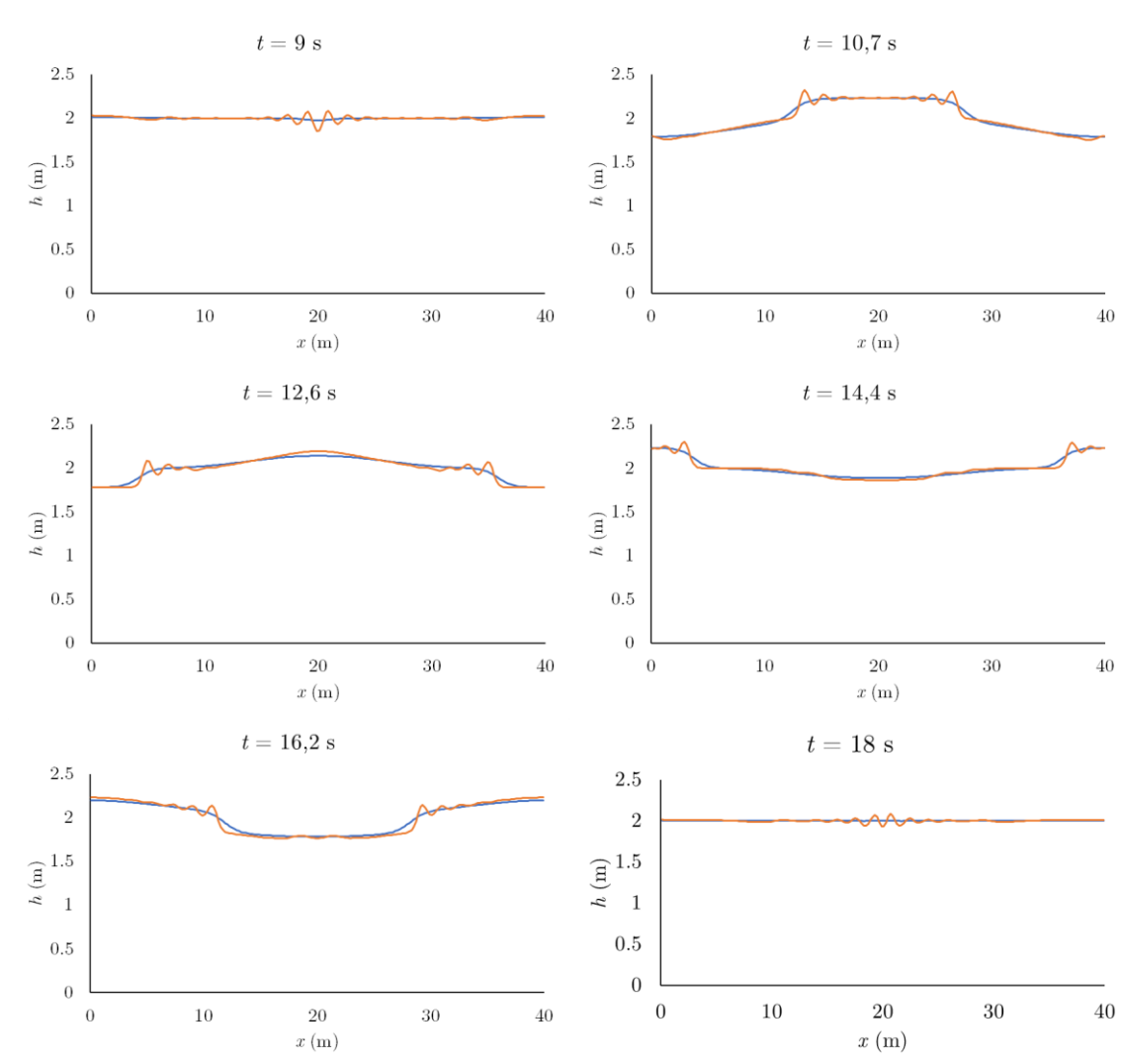


Figura 28. Evolución de la solución para VF (-) y para EF (-)

### 5.2.2. Caso estacionario

Para el caso de flujo entrante, las condiciones de contorno son:

$$\begin{aligned}h_0(x) &= 2,196 \text{ m } \forall x \\q_1 &= 1 \text{ m}^2/\text{s} \\z(x) &= 0.75 - 0.09(x + 20)^{1/2}\end{aligned}\tag{Ec. 83}$$

Tras simular el suficiente tiempo como para obtener el estado estacionario, el resultado se muestra en la Figura 29. El tamaño de la malla se ha ajustado a 1 m para ambos métodos.

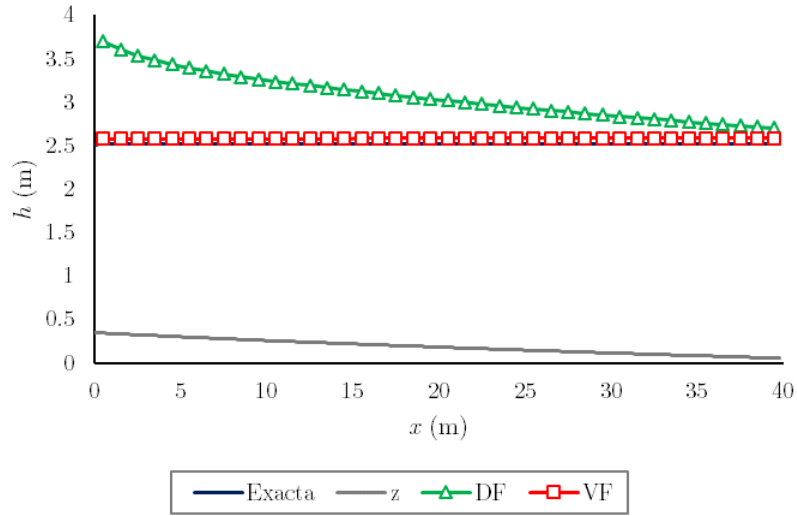


Figura 29. Solución tras el estado transitorio

Observamos como la solución con VF converge a la solución exacta mientras que la de DF se aleja bastante en la zona inicial.

## 6. Conclusiones

En este trabajo se han comparado tres métodos numéricos distintos, empleando diferentes esquemas y tipos de aproximaciones presentes en la literatura. Tras realizar casos comparativos entre ellos pueden extraerse distintas conclusiones.

Comenzando por el método de diferencias finitas, se aprecia en los casos que la solución obtenida es muy pobre e inexacta y es incapaz simular muchos de los casos propuestos. En el caso 1, se aprecia para la malla fina como las oscilaciones entorno a las discontinuidades se magnifican. Lo mismo ocurre el caso 7. Por otro lado, se debe destacar la influencia que tiene el término fuente. En el caso 3 se ve un salto anómalo en la solución que tiene como origen el escalón del término fuente.

En cuanto al método de VF, se ha visto que es el más eficaz y robusto. No obstante, este incluye ciertas correcciones que los otros no, pero aun incluyéndolas el tiempo de computación de VF es mucho menor, siendo los otros más “simples” al no incluir modificaciones más allá del esquema básico.

Respecto al método de elementos finitos, para la aproximación con  $k=1$ , el desempeño es muy similar y en las comparaciones no se debe tomar como un método distinto si no como el método de VF, pero implementada otra aproximación del flujo. Por esa razón la solución es siempre tan parecida, pero falla en el caso 9, y en el 8 y 10 no es posible obtener solución quizás porque no hay un tratamiento específico del problema seco-mojado (en este caso  $h_R = 0$ ).

En cuanto a los casos para  $k=2$  y 3, como se comentó en el apartado 4.2, las oscilaciones lastran mucho a este método y no es capaz de simular muchos casos (por fallo al darse números imaginarios). Es cierto que para CFL bajo las oscilaciones se reducen y es capaz de llegar a una solución bastante similar a los otros métodos. La ventaja de este método con aproximaciones lineales o parabólicas es muy eficaz a la hora de simular las discontinuidades, pero esto solo es rentable si se eliminan las oscilaciones con limitadores de pendiente, si no compensa el tiempo que tardan y la cantidad de pasos que hay que realizar a la hora de programarlo.

Como era de esperar, al disminuir el tamaño del espaciado de la malla la solución converge hacia la exacta, lo que permite obtener soluciones con gran aproximación en tiempos relativamente cortos con VF en comparación con los tiempos necesarios para la solución exacta. Los métodos DG-EF 2 y 3 producen oscilaciones muy pronunciadas con este pequeño paso espacial y por tanto dan valores negativos para todos los casos.

Al reducir el CFL, estos métodos son capaces de “acortar” las oscilaciones para algunos casos y sí se han podido comparar, dando resultados muy similares excepto en el primer caso al resto de métodos. Por tanto, podemos concluir que CFL bajos permiten un mejor desempeño de DF, DG-EM2 y 3. Por otro lado esta variación no afecta prácticamente a VF.

En vista de los resultados, y viendo que a excepción de DF las aproximaciones son bastante buenas y muy similares entre ellas, para simulaciones de canales en 1D como es el estudio de este trabajo, implementando un código de VF se consiguen tanto robustez para multitud de casos (incluso saltos de agua grandes como el empleado para mostrar

la corrección de la entropía) y una muy buena relación de aproximación y tiempo de cálculo.

Los métodos de DF, aunque muy simples de programar tienen muchas limitaciones y es necesario incorporar correcciones adicionales a las que se le han hecho a VF, en concreto TVD. Lo mismo ocurre con elementos finitos, donde a parte el código es mucho más complejo ya que hay que realizar esa proyección y volver a componer la solución. Esto se aprecia en los tiempos de cálculo, ya que en teoría VF y DG-EM1 son iguales a excepción del flujo, en promedio para malla fina el de elementos finitos es 50 veces más lento en promedio.

# Referencias

- Bouche, D., G. Bonnaud, and D. Ramos. "Comparison of Numerical Schemes for Solving the Advection Equation." 2002.
- Cendón, María Elena Vazquéz. *Introducción al método de los volúmenes finitos*. Universidad de Santiago de Compostela Publicaciones, 2008.
- Chinchilla, Francisco Nicolás Cantero, Oscar Castro Orgaz, and Jose Luis Ayuso Muñoz. "Comparative analysis of numerical schemes applied to the dam break problem." *18th International Congress on Project Management and Engineering*. Alcañiz, 2014.
- Ferziger, J.H., and M. Peric. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 2002.
- Fuentes, F. [et al.]. «Cooling tank break simulation with CARPA and GID software: GID 2008.» *4th Conference on advances and application of GID*. Ibiza: International center for numerical methods in engineering., 2008. 75-78.
- Godunov, S. K. "A finite difference method for the computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics." *Mat. Sb.* 47, 1959: 357-393.
- Hervouet, Jean-Michel. *Hydrodynamics of Free Surface Flows*. Wiley, 2007.
- J. Murillo, P. García-Navarro. "Weak solutions for partial differential equations with source terms: Application to the shallow water equations." *Journal of Computational Physics, Volumen 229 (11)*, Junio 2010: 4327-4368.
- J. Soler, E. Bladé, M. Sánchez-Juny. "Ensayo comparativo entre modelos unidimensionales y bidimensionales en la modelización de la rotura de una balsa de materiales sueltos erosionables." *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 2012: 103-111.
- J. Murillo, A. Navas-Montilla. "A comprehensive explanation and exercise of the source terms in hyperbolic systems using Roe type solutions. Application to the 1D-2D shallow water equations." *Advances in Water Resources*, Diciembre 2016: 70-96.
- José Luis Aragón, Rodrigo Concha, Ernest Bladé, Manuel Gómez. "Comparación de dos esquemas numéricos en la modelización del flujo mixto en colectores pluviales." 2010.
- Khan, Abdul A., and Wencong Lai. *Modelling Shallow Water Flows Using the Discontinuous Galerkin Method*. CRC Press, 2014.
- Logan, J. David. *An introduction to nonlinear partial differential equations*. Wiley, 2008.
- Montilla, Adrian Navas, Pablo Solán Fustero, J. Murillo, and Pilar García Navarro. "Discontinuous Galerkin well-balanced schemes using augmented Riemann solvers with application to the shallow water equations." *Journal of Hydroinformatics*, Abril 2020.

- Murillo, J., and P. García Navarro. "Energy balance numerical schemes for shallow water equations with discontinuous topography." *Journal of Computational Physics*, Volumen 236, Marzo 2013: 119-142.
- P. García Navarro, F. Alcrudo y J.M. Savirón. "1-D open channel flow simulation using TVD-McCormack scheme." *Journal of Hydraulic Engineering*. Vol 118, Issue 10, 1992: 1359-1372.
- Roe, Philip L. "Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes." *Journal of Computational Physics*. Volumen 43, número 2, Octubre 1981: 357-372.
- Toro, Eleuterio F. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. A practical introduction*. [3<sup>a</sup> edición]. Springer, 2009.
- Tu, Shuangzhang, and Shahrouz Aliabadi. "A slope limiting procedure in Discontinuous Galerkin Finite Element Method for gas dynamics applications." *International journal of numerical analysis and modeling*, Volumen 2, 2005: 163-178.
- Yiquin Guan, Danrong Zhan. "Comparative study of numerical methods to the advection equation." 2006.